

## 電磁場の直接観察と相対性理論(第4回)

## ～電子の波動性と一般相対性理論～

進藤大輔\*

## 4.1 はじめに

前回(第3回)の講義「電子の集団運動の直接観察」を踏まえ、最終回となる本講義では、電子の点電荷としての振る舞いと干渉・回折効果を示す波動としての振る舞い、いわゆる粒子と波動の二重性の問題を取り上げる。本講義の第1回では、電子線ホログラフィーによる電磁場の観察と関連し、Maxwellの方程式について説明し、特殊相対性理論との整合性について述べた。今回は、電子の波動性を特徴づける干渉長について注目し、その取扱いには、一般相対性理論を踏まえる必要があることを指摘し、電子の干渉・回折効果について考察を進める。

一般相対性理論の重要性を指摘したEinsteinの言葉も引用しながら、最終回の講義を纏めたい。

## 4.2 電子線ホログラフィーによる電子の集団運動の観察の意義

前回述べた「電子の集団運動の直接観察」の成果における重要な2点を、図4.1の模式図で説明したい。まず、図下方に赤で示す2次電子の微細線維周辺での周回軌道のナノメートルスケールでの観察を取り上げる。この観察結果は、点電荷を仮定したMaxwellの方程式に基づく電場のシミュレーション結果と合致しており、特殊相対性理論と整合していることを示している。また、電荷保存則がナノメートルスケールの分解能で確認できており、点電荷としての挙動として理解できる。

一方、図上方に青で示す、入射電子の波動性は、試料位置

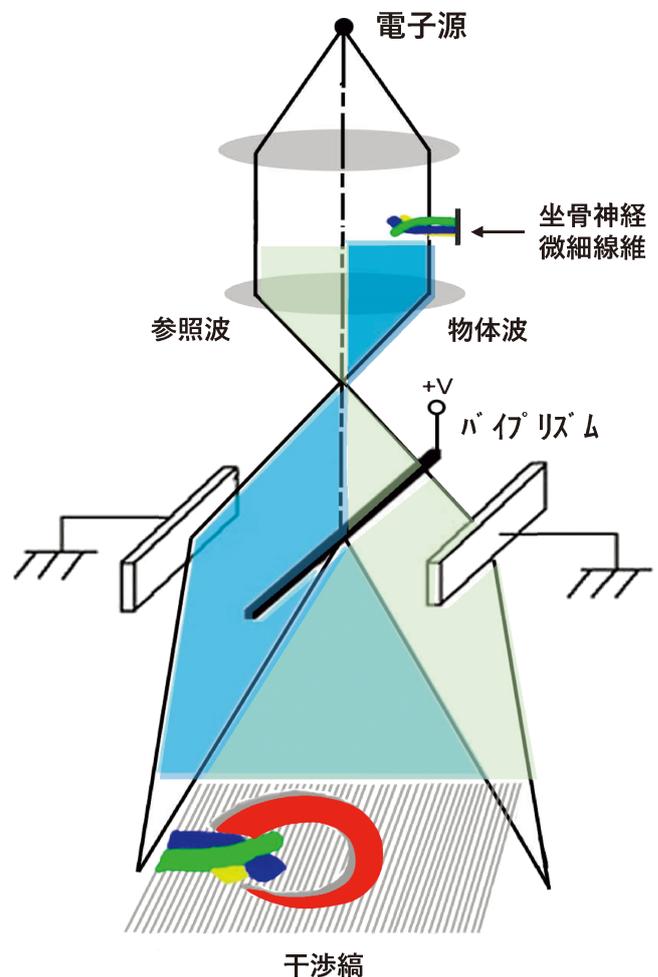


図4.1 電子の集団運動の直接観察を示す模式図。

\* 理化学研究所客員主管研究員，東北大学名誉教授(〒350-0395 埼玉県比企郡鳩山町赤沼2520日立基礎研センタ内)  
Direct Observation of Electromagnetic Field and Theory of Relativity — 4. Wave Behavior of Electron and General Relativity —;  
Daisuke Shindo\*(RIKEN Center for Emergent Matter Science, Hikigun, Saitama)  
Keywords: *electron holography, electromagnetic field, special theory of relativity, general theory of relativity, collective motion of electrons, wave-particle duality, spinning linear wave*  
2023年3月16日受理[doi:10.2320/materia.63.248]

でマイクロメートルスケールに及ぶ干渉性を有している。干渉長  $L$  は、

$$L = \lambda / 2\alpha = h / (2p \cdot \alpha) \quad (4.1)$$

で与えられる。ここで、 $\lambda$  と  $\alpha$  は電子の波長と入射電子線の照射角、また  $h$  と  $p$  は、それぞれ Planck 定数と電子の運動量である。この干渉長は、波長や運動量には依存するものの、電荷には依存しないことが分かる。ここで、本講義の第1回で引用した Einstein と Infeld の言葉<sup>(1)</sup>、

「物理現象の記述に対して本質的なものは、電気でも質点でもなく、電気並びに質点の間の空間における場である…」

を思い起したい。この干渉長に対応する場合は、運動量、質量に関わる重力場が関係しており、特殊相対性理論では扱えず、重力場を考慮した一般相対性理論に基づく、Einstein の場の方程式を考慮する必要があることを示している<sup>(2)</sup>。

### 4.3 一般相対性理論に基づく Einstein の場の方程式

第1回の講義で述べた Maxwell の方程式の特殊相対性理論による書き換えでは、スカラー量である線素  $ds$  を Minkowski 空間の計量テンソル  $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 (\mu = \nu = 0) \\ 0 (\mu \neq \nu) \\ -1 (\mu = \nu = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (4.2)$$

を用いて記述したが、重力が存在し、歪んだ時空に対しては、線素はより一般化された Riemann 空間での計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  を用いて

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.3)$$

と記述する必要がある<sup>(3)(4)</sup>。この重力場の様子を示す  $g_{\mu\nu}$  は、Einstein の場の方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

より、求めることになる。ここで、 $R_{\mu\nu}$  と  $R (= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$  は、それぞれ Ricci テンソル、スカラー曲率と呼ばれ、式(4.4)の左辺は、時空の曲率を示している。一方、右辺の  $\kappa$  は Einstein の重力定数、また  $T_{\mu\nu}$  は重力場を除くエネルギー運動量テンソルを示している。(4.4)の Einstein の場の方程式は、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  について、非線形な微分方程式となっており、この式を解いて、重力場の様子を示す  $g_{\mu\nu}$  を求めることは、一般に困難である。

特殊相対性理論は、 $g_{\mu\nu}$  が式(4.2)の  $\eta_{\mu\nu}$  の成分が定数で与えられる特別な場合と見なされ、重力場を無視した場合に相当する。Einstein の場の方程式の近似解として、Newton の法則が導かれる<sup>(3)</sup>。

1905年<sup>(5)</sup>に特殊相対性理論を発表し、1915年<sup>(3)(6)</sup>に一般相対性理論を確立した Einstein は、1919年に荷電粒子としての電子の安定性を議論している<sup>(7)</sup>。電荷の存在を考慮し、彼は一般相対性理論に基づいて導いた場の方程式(4.4)の右辺に、本講座の第1回で述べた Maxwell の方程式に基づく電磁場のエネルギー運動量テンソルを示す式(1.31)を代入し

た。さらに、荷電粒子の安定性は専ら、重力によると仮定し、代入した電磁場のエネルギー運動量テンソルが、 $g_{\mu\nu}$  とその  $dx^\mu$  の微係数から成るとして、次式を導いている。

$$f_{\mu\nu} j^\nu + \frac{1}{4\kappa} \frac{\partial R}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.5)$$

ここで、 $f_{\mu\nu}$  は第1回の講義で述べた、特殊相対性理論形式で記述した電場と磁場の成分を示す反対称2階共変テンソル(式(1.25))であり、 $j^\nu$  は4元電流(式(1.21))を示す。 $\kappa$  は定数で、 $8\pi K/c^4$  ( $K$  は、万有引力定数、 $c$  は光速)で与えられる。式(4.5)左辺の第1項は Coulomb 斥力に対応し、第2項は重力による圧縮力を示し、それらが打ち消しあっていることを示している。つまり、一般相対性理論に基づく Einstein の場の方程式から導かれた式(4.5)は、Coulomb 斥力と重力の圧縮力のつり合いにより、電子の安定性がもたらされていることを示している。

相対性理論として、主に特殊相対性理論が対象となり、電磁場の解釈やエネルギーと質量の等価性が議論されてきている中で、Einstein は一般相対性理論の重要性を以下の様に述べている<sup>(8)</sup>。

「次のような考えを支持する理由はまったくないと私は思う。その考え方とは、重力に対してだけ一般相対性原理が発見の意味をもっているが、一方、重力以外の物理学は、それと別に特殊相対性理論によって取り扱えるとする。だが、後でそれらを全体として、一般相対論の体系として矛盾のないように統合できる望みがあるとするのである。このような考え方は歴史的なものとしては理解できるのであるが、客観的には正当なものとは思えない。現在、重力の影響について比較的僅かしか知られていないからといって、そのことが、原理的な性格をもつ理論研究において、一般相対性原理を無視してよいとする決定的な理由にはならない。いいかえれば、重力なしの物理学はどんな形をしているか? といったことなど問題にする値うちもないと確信している。」

### 4.4 Einstein の場の方程式に対する Infeld と Schild の近似解と線状波モデル

1949年、Infeld と Schild は、図4.2(a)に模式的に示すように、粒子を  $N_0$  個の1次元の特異点 ( $m_0$ ) と見做し、 $N_0 \rightarrow \infty$ 、 $m_0 \rightarrow 0$  ( $N_0 \times m_0 = 1$ ) の条件で、Einstein の場の方程式の近似解として、1次元の波動方程式が得られることを示している<sup>(9)</sup>。その近似解は、図4.2(a)の特異点列に対応した場であり、この場合は図4.2(b)に示す1次元的な波動からなると理解できる。この1次元の波動、つまり線状波は、図4.2(c)に模式的に示す量子論で用いられる平面波と対比できる。一方、電子は  $h/4\pi$  の大きさのスピ角運動量を有しており、線状波は粒子位置で回転しているものと考えらる。この回転する線状波モデルを基に電子の干渉・回折現象を定式化し、1個、1個の電子の寄与を考慮しながら、シミュレーションにより干渉縞や回折強度分布を求め、観察結果と対比することができる<sup>(4)(10)(11)</sup>。

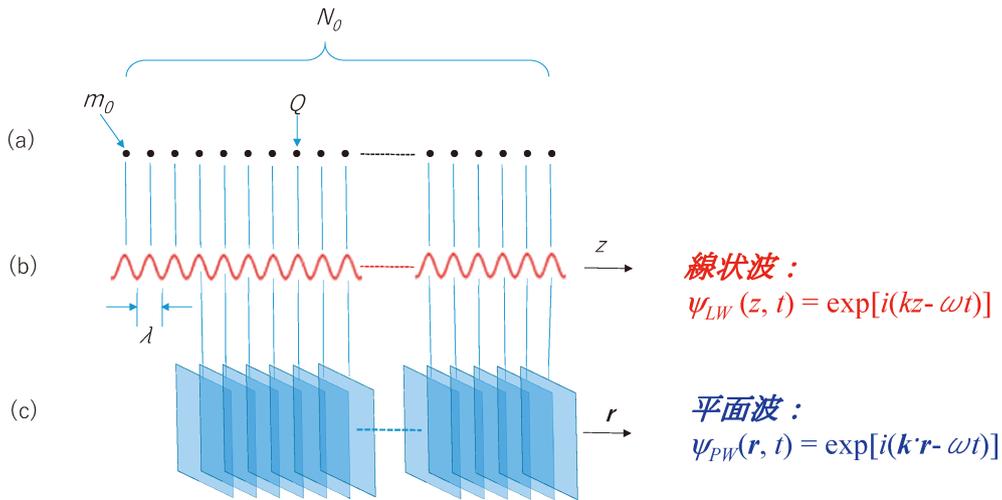


図4.2 (a) 電子を  $N_0$  個の1次元的特異点 ( $m_0$ ) 列で近似した場合のモデル. (b) 波長  $\lambda$  の重力場からなる線状波の模式図. (c) 等位相面を青で示した平面波の模式図.

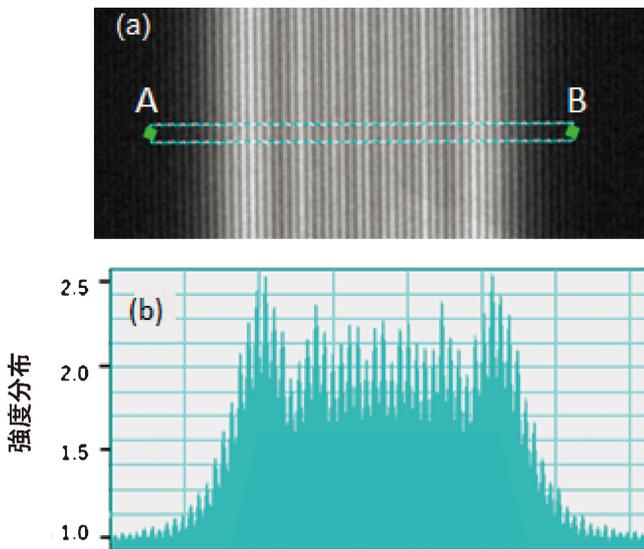


図4.3 バイプリズムを搭載した 300 kV 電子顕微鏡で撮影された電子の干渉縞 (a) と A-B 間の強度分布 (b).

以下では、電子の典型的な波動挙動の一つである、干渉縞の形成過程の解析結果について説明する。図4.3は、バイプリズムを搭載した 300 kV 電子顕微鏡で撮影された電子の干渉縞(a)とその強度分布(b)である。

図4.4は、回転する線状波モデルを用いて、電子が  $2 \times 10^2$  個(a)、 $2 \times 10^3$  個(b)、 $2 \times 10^4$  個(c) 入射した際の干渉縞のシミュレーション像を示している。図4.4(d)は、入射電子数の多い図4.4(c)の Y 軸方向に積算した強度分布を示しており、観察された図4.3(b)と良く対応している。

このように、波動としての干渉縞の形成過程を、回転する線状波モデルを基に、1個、1個の電子による寄与を考慮してシミュレーションを行い、実験結果が再現できる。一方、高速で回転する線状波は、点電荷として観測されることになり、電子の波動と粒子の二重性が回転する線状波モデルを用いて説明できることがわかる<sup>(4)</sup>。

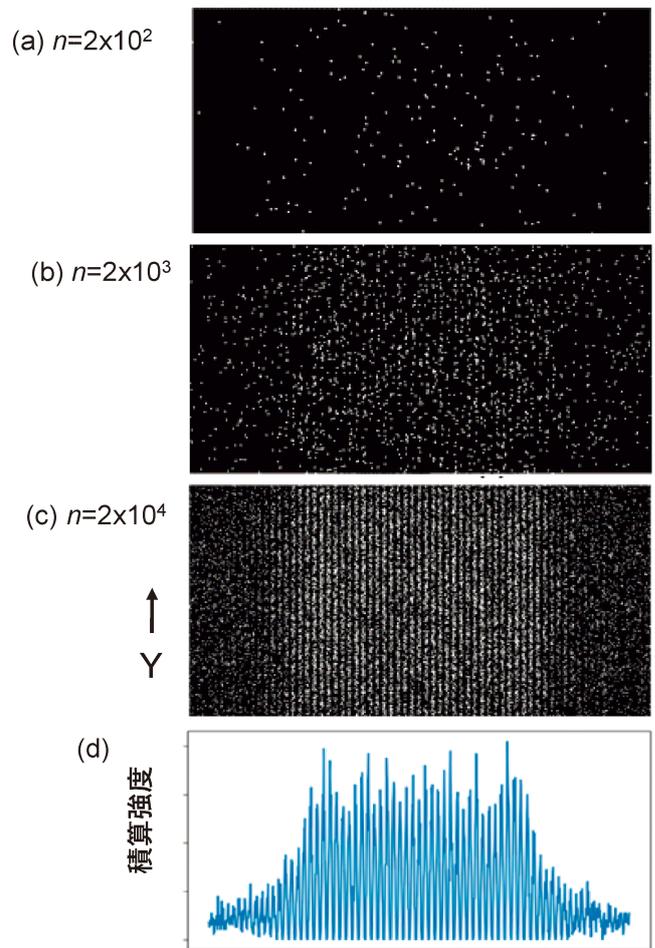


図4.4 回転する線状波モデルを用いて、電子が  $2 \times 10^2$  個 (a)、 $2 \times 10^3$  個 (b) および  $2 \times 10^4$  個 (c) 入射した際の干渉縞のシミュレーション像. (d) (c) の Y 軸方向に積算した強度分布.

