

## 電磁場の直接観察と相対性理論(第1回)

## ～電磁場の観察と特殊相対性理論～

進藤大輔\*

## 1.1 はじめに

筆者は、透過電子顕微鏡を用いた材料の評価研究に長く携わってきた。最近、電子線ホログラフィーによる電磁場の観察を行い、各種材料の電気的・磁気的特性の評価を実施している。電磁場の観察とその解析を進めながら、電磁場さらに重力場を数学的にテンソルを用いて記述し、場の概念を統一的に解釈する相対性理論の重要性をあらためて認識している次第である。

本講義ノートでは、この電磁場観察の原理やその応用例を紹介すると共に、その基礎となる相対性理論も説明しながら、この理論の普遍性と美しさに触れてみたい。この講義ノートは4回の予定で、下記の内容を紹介する。

- (1) 電磁場の観察と特殊相対性理論
- (2) 電子線ホログラフィーの原理と応用
- (3) 電子の集団運動の直接観察
- (4) 電子の波動性と一般相対性理論

上記の内容を紹介しながら、アインシュタインの貴重なメッセージも適宜引用したい。

## 1.2 電磁場とその観察の重要性

材料の微細構造を詳細に明らかにする上で、透過電子顕微鏡が広範に利用されている。以前、筆者は、本誌の入門講座で、「透過電子顕微鏡」の主な機能として、

- (a) 微細構造観察機能
- (b) 組成・状態分析機能
- (c) 電場・磁場可視化機能

の三つを取り上げ概説した<sup>(1)-(3)</sup>。ここでは、材料の電気的・磁気的な特性を理解するためには、(a)と(b)による材料の微細構造の理解に加え、(c)で説明した電子線ホログラフィーによる電磁場の観察が重要であることを指摘した。この電磁場の観察と関連して、「場の概念」の重要性を指摘したアインシュタインとインフェルトの言葉<sup>(4)</sup>を以下に引用したい。

「物理学に一つの新しい概念、すなわちニュートン時代以後の最も重要な発明としての場の概念が現れて来ます。物理現象の記述に対して本質的なものは、電気でも質点でもなく、電気並びに質点の間の空間における場であるということが実現されるのには、偉大な科学的想像力を要しました。場の概念は最大の成功を示し、電磁場の構造を記述し、かつ電気並びに光の現象を支配するところの、マクスウェルの方程式を形作らせました。

.....

相対性理論は場の問題から起こります.....」

上文の意味するところは、図1.1(a)に示すU字型磁石を例に理解できる。この磁石に、鉄などの磁性体を近づけると、磁石に引き寄せられる力を感じる。この力の発生は、磁石と磁性体間に存在する「場」つまり磁場の存在によって理解でき、こうした場の概念は、偉大な科学的想像力によってもたらされたことを上文では指摘している。図1.1(b)には、実際に磁石周辺に存在する磁束の分布を、マクスウェルの方

\* 理化学研究所チームリーダー、東北大学名誉教授、日本金属学会フェロー(〒351-0198 和光市広沢 2-1フロンティア中央研究棟306-2) Direct Observation of Electromagnetic Field and Theory of Relativity — 1. Observation of Electromagnetic Field and Special Relativity —; Daisuke Shindo\*(RIKEN Center for Emergent Matter Science, Wako)  
Keywords: *electron holography, electromagnetic field, special theory of relativity, general theory of relativity, collective motion of electrons, wave-particle duality, spinning linear wave*  
2023年3月16日受理[doi:10.2320/materia.63.54]

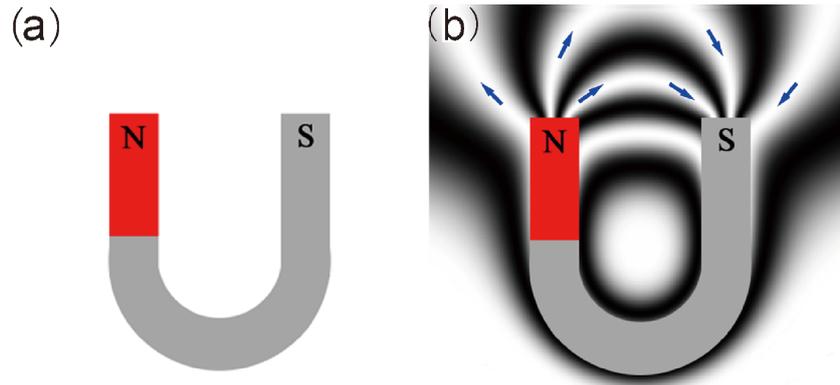


図1.1 U字型磁石 (a) と磁石周辺の磁束分布 (b). 矢印は、磁束の方向を示す.

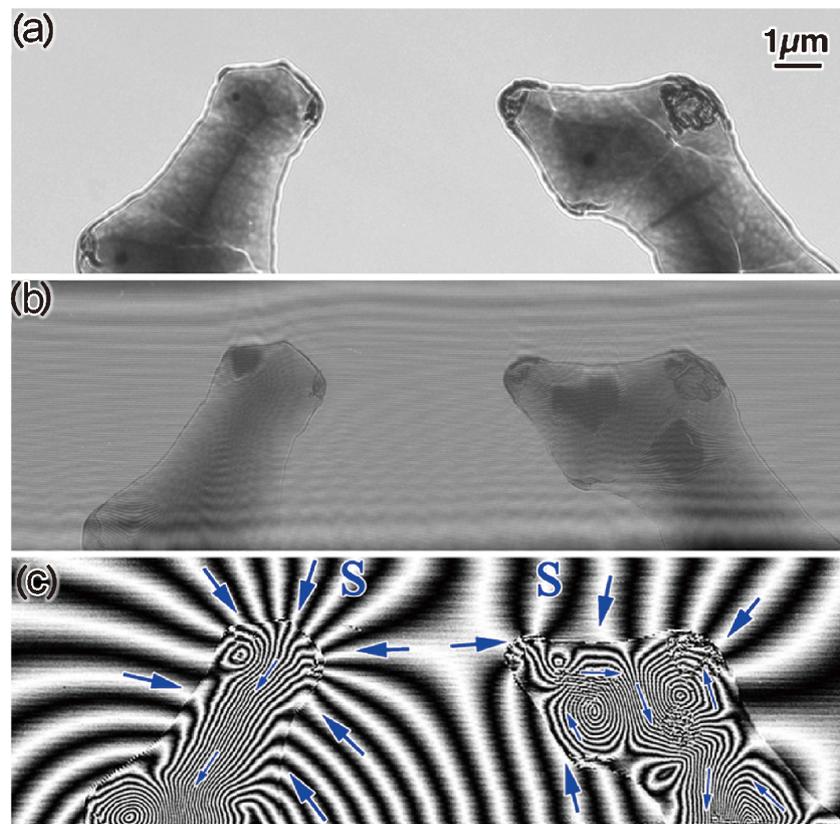


図1.2 (a) Co-Zr-O 磁性体の透過電子顕微鏡像. (b) 電子線バイプリズムを用いて得られた (a) 領域のホログラム. (c) フーリエ変換処理を (b) のホログラムに施して得られた磁束の分布を示す位相再生像.

程式に基づき計算によって求め表示してある。科学的想像力によりもたらされた、こうした磁場は、当時、肉眼や汎用の顕微鏡法を用いても直接観察することは困難であった。

一方、現在では、次回その原理を詳述する電子線ホログラフィーを用いて可視化でき、また定量的に磁束の分布を解析できる。図1.2(a)に、Co-Zr-O 磁性体の透過電子顕微鏡像を示す。この汎用の顕微鏡像では、薄片化された二つの領域が左右に確認できるのみである。この領域について、電子線バイプリズムを用いて、電場や磁場の情報を記録できる(b)のホログラムを作成する。このホログラムにフーリエ変換処

理を施し、磁場の情報を再生したものが、図1.2(c)である。(a)の透過電子顕微鏡像では、試料の外形しか観察できていないが、(c)の電子線ホログラフィーにより得られた位相再生像では、試料内部やその周辺の磁束の分布の様子が明瞭に可視化されている。次回詳述するように、(b)のホログラムに記録された干渉縞の曲がりの様子を調べることにより、磁束の大きさとその方向(矢印)も特定でき、二つの試料片はどちらもS極で、斥力が働いていることが分かる。

科学的想像力によって生み出された電磁場の存在を、現在は、先端の科学技術である電子線ホログラフィーにより、直

接可視化され定量的に解析が可能となっている。さらに、得られた実験データを通して、基礎理論と対比させながら、複雑な量子現象の理解への発展が期待されている。各種先端材料の電磁場の可視化例を、本講義第2回で紹介するが、本講義の第3回では、材料内外の電磁場のみならず、電子の集団運動の様子を、移動する電子により生じる電場の乱れを検出することで可視化できることを示す。最終の第4回の講義では、電子線ホログラフィーの結像原理と関連する電子の波動としての干渉現象が、一般相対性理論と密接に関連していることを指摘したい。

### 1.3 Maxwellの方程式と電磁ポテンシャル<sup>(5)</sup>

Maxwellの方程式で記述される電磁場と電磁ポテンシャルとの関係を知ることは、次回、電子線ホログラフィーによる電磁場の可視化原理を理解する上で、必須である。また次節でMaxwellの方程式を特殊相対論形式でより一般化して記述する上でも重要である。

Maxwellの方程式は、電荷密度 $\rho$ と電流密度を $\vec{j}$ とするとSI単位系を用いて以下のように、記述できる。

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad (1.4)$$

ここで、 $\vec{D}$ と $\vec{E}$ は、電束密度と電場の強さ、また $\vec{B}$  and  $\vec{H}$ は、磁束密度と磁場の強さを示し、以下の関係がある。

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1.5)$$

ここで、 $\epsilon_0$ と $\mu_0$ はそれぞれ真空の誘電率と透磁率に対応し、以下の関係がある。

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2 \quad (1.6)$$

ここで、 $c$ は光速を示す。

式(1.1)と(1.2)より、 $\vec{B}$ と $\vec{E}$ は、スカラーおよびベクトルポテンシャル $\varphi$ と $\vec{A}$ を用いて

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (1.7)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \quad (1.8)$$

と記述できる。式(1.7)と(1.8)を式(1.3)と(1.4)に代入することにより、

$$\square \varphi = \rho / \epsilon_0 \quad (1.9)$$

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.10)$$

$$\left( \square \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right)$$

が得られる。式(1.9)と(1.10)は、以下のローレンツの条件(Lorenz condition)で式(1.3) and (1.4)と等価となる<sup>(6)</sup>

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

これは、式(1.9)と(1.10)より

$$\square \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (1.12)$$

が得られるが、この式の右辺は電荷保存則よりゼロとなるため、式(1.11)が成立することがわかる。

### 1.4 特殊相対性理論に基づくMaxwell方程式の記述<sup>(5)</sup>

今、電荷をもった粒子が静止している場合、その周囲に形成される電場は、上述したMaxwellの方程式(1.1)-(1.4)の中の式(1.3)を用いて評価できる。しかし、粒子あるいは観測者が、等速運動する場合には磁場が形成されるため、式(1.4)を考慮する必要がある。

一方、特殊相対性理論においては、相対的に等速運動する慣性系間においては、物理法則はいかなる場合にも、同一の方程式で記述される(ローレンツ不変性)。この条件と、光速がいかなる慣性系でも等しいこと(光速度不変の原理)を踏まえると、Maxwellの方程式は以下のように記述できる。

時空の1点を示すのに、相対性理論では、4次元座標 $x^\mu$  ( $\mu=0, 1, 2, 3$ )を用いる、つまり

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (1.13)$$

右肩に添え字の付いた量は、反変成分と呼ばれる。

$x^\mu$ に近い点を取り、その点の座標を $x + dx^\mu$ としよう。変位を示すこの4つの成分は、反変ベクトルと見做される。特殊相対性理論においては、以下に示される線素 $ds$ の長さは、座標系の選び方に無関係な量となりスカラー量と呼ばれる

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (1.14)$$

議論を一般化するために、この式は、

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.15)$$

と記述される。ここで、記号 $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー空間の計量テンソルと呼ばれ

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 (\mu = \nu = 0) \\ 0 (\mu \neq \nu) \\ -1 (\mu = \nu = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (1.16)$$

で与えられる。ここで、添え字が右下に付されたテンソルは、(2階の)共変テンソルと呼ばれる。Einsteinの記載様式に倣い<sup>(7)</sup>、和の記号 $\sum$ を省略し、式(1.15)は、簡略して

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.17)$$

と記述する。この簡略化により、以下では、同じ添え字が上付きと下付きで表れた項では、いつも和は、0から3まで取るものとする。

ここで、上述したスカラーとベクトルポテンシャルを用いて4元ポテンシャルを構成し、Maxwellの方程式を特殊相対性理論形式に書き換えてみよう。まず、反変ベクトル $A_\mu$ は以下のように記述できる。

$$A^0 = \varphi/c, \quad A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z \quad (1.18)$$

一方、共変ベクトル $A_\mu$ は $\eta_{\mu\nu}$ と反変ベクトル $A^\nu$ を用いて

$$A_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad (1.19)$$

