

マイクロメカニクスⅢ ～平板状領域の応用問題～

森 勉*

3. 平板状領域の応用問題

平板状領域に eigenstrain が入っているときのひずみ，応力の解析は楽である．本章では，この範疇に属する問題を検討して，問題処理法を議論する．

3.1 Ni 基超合金， γ - γ' 合金の γ' の misfit のため発生する残留応力の評価法⁽¹⁾

この節では，最近気が付いた応用問題を議論する．cuboid 状の γ' 粒子群が $\langle 001 \rangle$ 方向に大体規則的に配列している場合である． γ' 粒子の misfit を

$$\varepsilon_{ij}^*(\gamma') = \varepsilon_0 \delta_{ij} \quad (3.1)$$

とする．この misfit を持つ γ' 粒子群が作る残留応力の簡便な評価法を以下に調べる．

第 1 章，1.5 節(第 1 回)で論じた，二つの内部応力の起原の間の相互作用の弾性エネルギー表現を利用する．一つの起原 A の体積 V_A ，その eigenstrain を $\varepsilon_{ij}^*(A)$ ，これが作る応力を $\sigma_{ij}(A)$ とする．もう一つの起原 B によるこれらに対応する量を体積 V_B ，その eigenstrain を $\varepsilon_{ij}^*(B)$ ，これが作る応力を $\sigma_{ij}(B)$ とする．A と B が共存するときの A と B との相互作用の弾性エネルギー E_1 は，

$$E_1 = - \int_{V_B} \sigma_{ij}(A) \varepsilon_{ij}^*(B) dV \quad (3.2)$$

または，

$$E_1 = - \int_{V_A} \sigma_{ij}(B) \varepsilon_{ij}^*(A) dV \quad (3.2')$$

である．(相互作用の弾性エネルギーはすでに定義してある) この二つより

$$- \int_{V_B} \sigma_{ij}(A) \varepsilon_{ij}^*(B) dV = - \int_{V_A} \sigma_{ij}(B) \varepsilon_{ij}^*(A) dV \quad (3.3)$$

として良い．これを拡張して，

$$-f_B \sigma_{ij}(B, A) \varepsilon_{ij}^*(B) = -f_A \sigma_{ij}(A, B) \varepsilon_{ij}^*(A) \quad (3.4)$$

とする．A と B に同種のものが多くあり，A 群の体積比が f_A であり，B 群の体積比が f_B の場合である． $\sigma_{ij}(B, A)$ は A 群が領域 B に作る平均応力である．同様に， $\sigma_{ij}(A, B)$ は B 群が領域 A に作る平均応力である．(以下に示すやり方で，相互作用の弾性エネルギー表示を，内部応力とか残留応力の評価に使うのは新しい試みだと思っている．)

実用 Ni 基超合金の組織の特徴を利用する．(001)面に平行な γ 領域((001) γ channels)は平べったい形をしている．(001)channel 群に γ' 粒子群の作る平均応力を $\sigma_{ij}(001, \gamma')$ とする．(001)channels 群が eigenstrain $\varepsilon_{ij}^*(001)$ を持つときに， γ' 粒子群に作る応力を $\sigma_{ij}(\gamma', 001)$ とする．この ε_{ij}^* はこれから選ぶ．式(3.4)は，

$$-f_3 \sigma_{ij}(001, \gamma') \varepsilon_{ij}^*(001) = -F \sigma_{ij}(\gamma', 001) \varepsilon_{ij}^*(\gamma') \quad (3.5)$$

となる． f_3 は (001)channel 群の体積比， F は γ' 粒子群の体積比である．ここで，例えば $\varepsilon_{11}^*(001) = \varepsilon^*$ をとる．(001)channel が平べったい形をしていることから，一つの(001)channel のみが存在している時に，その中の応力 σ_{ij}^0 は容易に算出できる．さらに，平均場近似⁽²⁾⁽³⁾を用いれば，(001)channels 群がそれらの外側につくる平均応力が求まる．これは， $\sigma_{ij}(\gamma', 001)$ を含む．数式で書けば，まず，

$$\sigma_{ij}(\gamma', 001) = -f_3 \sigma_{ij}^0 \quad (3.6)$$

である． $\varepsilon_{ij}^*(\gamma')$ は分かっており，上の手続きで $\sigma_{ij}(\gamma', 001)$ は算出されており，試しの $\varepsilon_{11}^*(001) = \varepsilon^*$ は与えられているので， $\sigma_{11}(001, \gamma')$ が求まる．具体的には， $\varepsilon_{11}^* = \varepsilon^*$ を試すと，

$$\sigma_{11}^0 = -\alpha \varepsilon^*, \quad \sigma_{22}^0 = -\beta \varepsilon^*, \quad \sigma_{33}^0 = 0 \quad (3.7)$$

$$\alpha = \frac{(C_{11} + C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}}, \quad \beta = \frac{C_{12}(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \quad (3.8)$$

* 防衛大学校研究協力者

Micromechanics III ~Plate-like Inclusion~; Tsutomu Mori (National Defence Academy, Yokosuka)

Keywords: residual stress, aligned γ' precipitates, martensite structure

2016年2月7日受理[doi:10.2320/materia.55.528]

が出る. C_{11}, C_{12} は弾性係数の Voigt 表示である. 式(3.7) と(3.6), (3.5)を使うと $\sigma_{11}(001, \gamma') = F(\alpha + \beta) \varepsilon_0$ が求まる. 同様なことを, $\varepsilon_{22}^* = \varepsilon^*, \varepsilon_{33}^* = \varepsilon^*$ の場合に行うと, 他の応力成分も求まる. 最終的には,

$$\sigma_{11}(001, \gamma') = \sigma_{22}(001, \gamma') = F(\alpha + \beta) \varepsilon_0, \quad \sigma_{33}(001, \gamma') = 0 \quad (3.9)$$

が得られる. 同様にして, (100)面に平行な(100)channels と(010)面に平行な(010)channels 群の応力も出る. 具体的には, (100)channels には

$$\sigma_{22}(100, \gamma') = \sigma_{33}(100, \gamma') = F(\alpha + \beta) \varepsilon_0, \quad \sigma_{11}(100, \gamma') = 0 \quad (3.10)$$

(010)channels には,

$$\sigma_{33}(010, \gamma') = \sigma_{11}(010, \gamma') = F(\alpha + \beta) \varepsilon_0, \quad \sigma_{22}(010, \gamma') = 0 \quad (3.11)$$

なる平均応力が存在することが分かる.

言葉で言えば, 平べったい γ channels には, 板面に平行な方向に圧縮の応力 $F(\alpha + \beta) \varepsilon_0$ が発生し, 板面に垂直な方向には応力なしということである ($\varepsilon_0 < 0$ を仮定). これに応じて, γ channel には, 板面に平行な方向に縮んでいる弾性ひずみ, 板面に垂直な方向に伸びている弾性ひずみが存在している(一種の Poisson 変形)ことが分かる. これらの弾性ひずみは Hooke の法則から求まる.

以上の解析から, (1) γ 相からの回折は二つに分裂するか, 二つの peaks が合体している profile となることがわかる. (このことは, γ 相と γ' 相の回折の分裂, あるいは重なりとは違う話である.) (2) γ channels 内の残留応力が, 板面に平行な方向と垂直な方向で異なることから, 塑性変形が起きる channels に選択性が生じる*. しかし, [001]方向への負荷の場合, 引っ張りと同縮での降伏応力は同じことが分かる.

γ - γ' 合金の回折現象への残留応力の効果は, 塑性変形を加えた場合の方が大きく現れると思っている. それは, 弾性ひずみが析出 misfit よりはるかに大きいからである. この場合の残留応力やそれから出てくる弾性ひずみは容易に求まる.

次に, γ' 粒子群内の平均応力を求める. 内部応力の体積積分はゼロであることが知られている. 式に書けば,

$$\int_D \sigma_{ij} dV = 0 \quad (3.12)$$

である. ここで扱った問題では, 上式は

$$f \sigma_{ij}(\gamma', \gamma') + f_3 \sigma_{ij}(001, \gamma') + f_1 \sigma_{ij}(100, \gamma') + f_2 \sigma_{ij}(010, \gamma') = 0 \quad (3.13)$$

である. f_1 は(100)channels の体積比, f_2 は(010)channels の体積比である. また, $\sigma_{ij}(\gamma', \gamma')$ は γ' 粒子群による, γ' 粒子群内の平均応力である. ここで, $f = f_1 = f_2 = f_3 = (1 - F)/3$ とおき, 式(3.13)に(3.9), (3.10), (3.12)を入れると,

$$\sigma_{ij}(\gamma', \gamma') = -2f(\alpha + \beta) \varepsilon_0 \delta_{ij}$$

$$= -2 \frac{(1-F)}{3} \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0 \delta_{ij} \quad (3.14)$$

と, γ' 粒子群内の平均応力も出る.

ついでに, γ' 粒子の misfit によって蓄えられる, 弾性エネルギーを求める. 式(1.26)を使うと, 物体単位体積当たりの弾性エネルギーは,

$$\bar{E} = (1-F)F \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3.15)$$

が出る. $1-F$ は平均場近似から来るものであり, F は γ' 粒子群の体積比なので, 一個の γ' 粒子(cuboid, 体積 V_S)に割り当てると, 弾性エネルギーは,

$$E_S = V_S \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3.16)$$

となる.

式(3.16)は奇妙なことを言っている. いま, 平べったい(001)に平行な一つの γ' 粒子のみがあったとする. この場合, この中の応力は,

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (3.17)$$

である. 式(1.6)を使うと, この一個の平べったい γ' 粒子のために生じる弾性エネルギーは,

$$E_S = V_S \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3.18)$$

と求まる. V_S はここで考えた一個の平べったい γ' 粒子の体積である. これは, 式(3.16)と同じである. これでいいのだろうか. 以下に, 検討する.

図1のように平べったい, 大きな γ' 領域 ($V, \varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_0 \delta_{ij}$) の一部に平べったい小さな領域(黒色, 体積 V' , eigenstrain $\varepsilon_{ij}^T = -\varepsilon_0 \delta_{ij}$) を挿入する. この結果, 大きな γ' 領域は二つに分断されたことになる. この分断による弾性エネルギーの変化 ΔE は, V' の自己エネルギー $E_S(V')$ と, V と V' との相互作用エネルギー $E_1(V, V')$ の和である. (以下に行う検討に使う相互作用の弾性エネルギーには, $\sigma_{ij}(001, \gamma')$ を求める場合に使った多少技巧を施したものでなく, 普通のエネルギー計算に必要なものである)

$$\Delta E = E_S(V') + E_1(V, V') \quad (3.19)$$

V' 挿入前の V 中の応力は, 平板領域の Eshelby tensors $S_{3333} = 1, S_{3311} = S_{3322} = C_{12}/C_{11}$ (他の relevant Eshelby tensor はゼロ)と Hooke の法則より,

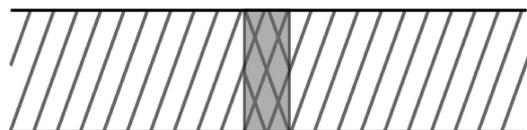


図1 x_3 方向に垂直な平べったい, 大きな γ' 領域 ($\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_0 \delta_{ij}$, ハッチ部)に, x_1 方向には平べったい小さな薄い板状領域(黒色, ダブルハッチ部, $\varepsilon_{ij}^T = -\varepsilon_0 \delta_{ij}$) を挿入.

* 田中克志, 市坪 哲: 金属学会, 2007年春の私の発表に良い comments をしてくれた. 後で良く考えたら, やっとこの comments の意味がわかった.

$$\sigma_{11}(V) = \sigma_{22}(V) = -\frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0, \quad \sigma_{33}(V) = 0 \quad (3 \cdot 20)$$

と求まる。これと、 V' の eigenstrain $\varepsilon_{ij}^T = -\varepsilon_0 \delta_{ij}$ より、

$$E_1(V, V') = -2V' \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3 \cdot 21)$$

が求まる。 $\varepsilon_{ij}^T = -\varepsilon_0 \delta_{ij}$ を持つ V' 中の応力は式(3・20)を利用して、

$$\sigma_{22}(V') = \sigma_{33}(V') = \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0, \quad \sigma_{11}(V') = 0 \quad (3 \cdot 22)$$

と求まるので、 $E_S(V') (= -(V'/2) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^T)$ は、

$$E_S(V') = V' \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3 \cdot 23)$$

となる。式(3・19)と(3・21), (3・23)より、大きな平板状 γ' 領域を体積 V' の平板状領域で分断したときの弾性エネルギーの変化は、

$$\Delta E = -V' \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3 \cdot 24)$$

となり、分断しただけ、分断領域の体積分だけ減少することが分かる。以上の議論を繰り返せば、式(3・18)なる表現の妥当性がある程度納得できることになる。

もっと説得力のある議論は cuboid 状 γ' 領域の体積を増やしてみることである。例えば、cuboids γ' の (001) 界面が [001] 方向に少しだけ成長する(厚みの少しの変化)と空想するのである。この時の弾性エネルギーの変化 δE は、この仮想的な成長領域(体積 δV)と、前の議論した σ_{ij} (001, γ') と ε_{ij}^T との相互作用エネルギー E_1 と、この成長した領域 δV の自己エネルギー E_S の和である。すなわち、

$$\delta E = E_1 + E_S \quad (3 \cdot 25)$$

である。以下に E_1 と E_S を求める。殆ど前に書いた表現と重複するが勘弁して欲しい。式(3・9)を使うと、

$$E_1 = -\delta V \sigma_{ij} (001, \gamma') \varepsilon_{ij}^T = -2\delta V F \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3 \cdot 26)$$

と求まる。 E_S は、(3・23)を求めたことと全く同じであり、

$$E_S = \delta V \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3 \cdot 27)$$

である。従って、

$$\delta E = (1 - 2F) \delta V \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \quad (3 \cdot 28)$$

である。

上のような γ' 領域の成長を、単位当たりの γ' 領域の変化 δF 分で表すと、単位当たりの弾性エネルギーの変化 $\delta \bar{E}$ は、

$$\delta \bar{E} = (1 - 2F) \frac{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} \varepsilon_0^2 \delta F \quad (3 \cdot 29)$$

となることが分かる。式(3・29)は(3・15), (3・16)とつじつまの合うものである。式(3・15)より、(3・29)と全く同じ表現が出るからである。式(3・15)を得るには、cuboid 状 γ' 粒子内部の応力を使っている。式(3・29)は、平べったい γ' 粒子

内の応力と、cuboid 状 γ' 粒子の外側の応力を使っている。計算の道筋(route)が異なっているにも係らず、同一の表現が出ることは、本節3・1の考え方の合理性や、近似の妥当性を与えているものと理解したい。

3・2 マルテンサイト変態への応用

マルテンサイト変態では、良く晶壁面を無ひずみ無回転の面として扱う。晶壁面の法線方向を x_3 としたとき、この講義での平板状領域介在物で論じた、 ε_{33}^* , ε_{31}^* , ε_{32}^* だけが存在するなら、応力を生じないということらしい。(以下は北大の加藤博之さんとの discussion による。)

上の条件を式に書くと、

$$\varepsilon^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13}^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31}^* & 0 & \varepsilon_{33}^* \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 30)$$

である。ここで、 x_3 の周りに適当に回転した座標系をとっている。式(3・30)を固有値(主ひずみ)で書くと、

$$\varepsilon^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^* \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 31)$$

となる。(3・31)が(3・30)と同じになるためには、

$$\varepsilon_{11}^* \varepsilon_{33}^* \leq 0 \quad (3 \cdot 32)$$

でなくてはならない。たいていは、変態ひずみ(ε_{ij}^T)は分かりやすい、例えば母相の結晶軸に合わせてとる。分かりやすい例は母相立方晶の軸に合わせる場合である。NiTi の場合に分かるように、一般には、変態ひずみは多くの成分をもつ。こういう場合、式(3・30)あるいは(3・31)かつ(3・32)になっているかの判定を楽にする方法がある。それは、ひずみから出る、座標系に依存しないある量(不変量)を使う手である。いまの問題の場合、それは、

$$\det(\varepsilon_{ij}^T) = 0, \quad \varepsilon_{ij}^T \varepsilon_{ij}^T - \varepsilon_{ii}^T \varepsilon_{jj}^T \leq 0 \quad (3 \cdot 33)$$

である。

たいていのマルテンサイト変態の場合、一つの variant の変態ひずみ(Bain ひずみ)は式(3・33)を満足しない。そこで、二つの variants(A と B)をとり、それらの平均の変態ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}^T = f_A \varepsilon_{ij}^T(A) + f_B \varepsilon_{ij}^T(B)$ が式(3・33)を満足するように A と B の体積比を決める。これは、matrix を作り、行列式を check すれば良い。しかし、NiTi のように、結晶学的に等価なマルテンサイト variants が12個あるときは少し面倒である。予備操作として、二つの variants が無ひずみ無回転の界面を持つことを調べておくと良い。考え方はマルテンサイトと母相との界面と同じで、二つの variants の変態ひずみの差

$$\Delta \varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T(A) - \varepsilon_{ij}^T(B) \quad (3 \cdot 34)$$

が式(3・33)を満たしていることをあらかじめ調べておくことである。この $\Delta \varepsilon_{ij}^T$ が式(3・33)を満たすなら、体積ひずみがゼロなので、二つの variants は互いにせん断変形の関係にあり、双晶関係にあることがわかる。

以上は分かりきったことだが、マイクロメカニックスの応

