講　義　ノ　ー　ト

マイクロメカニックスⅠ
～基本的事項～

森　　　勉*

1. 緒　　論

編集委員会から，マイクロメカニックスの講義ノートを書けと言われた．ニュートン力学の範囲云々なる語句を使ってマイクロメカニックスを定義している人もいる．我が師のToshio Mura(村外志夫)は，“固体の微細構造の幾何学およびひずみ・応力を研究する”ものと説明している(1)．一方，皆川先生の極めて難解な解説記事もある(2)．この解説の最初の数行は分かるが，あとは金属屋や材料屋の日常生活に役に立ちそうもないことばかりである．堀さんの著書はかなり具体的問題を議論しているが，これも難しい(3)．

40年ほど前に，マイクロメカニックスの講義を，「まてりあ」の前身の会報に書いた(4)-(6)．このときは，教科書，参考書に解のみが書かれていることを，どうやって導くかということに主眼をおいた．古いものである．加藤雅治さんの講義も最近のまてりあ(7)に載っていて，未だマイクロメカニックスの手法が利用できるという感もある．Muraにも解説記事があり(8)，ありがたい教えが載っている．“一番良いことは，自分の問題を作ることである．そうするとマイクロメカニックスの有用性が自ずとわかって来る.”そこでこのノートでは，前に書いたノートとの重複を避け，かつ，この20年間に私が携わった具体的問題を題材として取り上げ，考え方，解き方を述べることにした．(Muraの教えの有用性云々に理解力を加えたい．具体的問題を考えれば，理解力も深まると考えている)その際，マイクロメカニックスでよく使われる方法，定式の説明をするようにした．こうすれば，基本的かつ使い易いformulaeも知り，マイクロメカニックスの有用性が見えてくると思う．そして，より理解が進むと思う．私の意味のある日常生活は，上のMuraの教えの実践であった．達成度は低いけど．今でも，理解度を高めたいと思っている．なお，これらの具体例の前に，基本概念をまず書くことにする．

1·1 基 本 概 念

マイクロメカニックスは，非弾性ひずみがあるときの弾性ひずみ，応力，弾性エネルギーを算えて，物事を議論するのに役立つ．非弾性ひずみとは，Muraが名づけたeigenstrainのことで，塑性ひずみ，熱膨張ひずみ，変態ひずみ，析出物のmisfitひずみ，電界誘起ひずみ等である．eigenstrain ε^*_{ij}があるとき生じる変位をu_kとし，全ひずみをγ_{kl}とする．γ_{kl}とu_kは

$$\gamma_{kl}=(u_{k,l}+u_{l,k})/2 \tag{1·1}$$

で結ばれる．(このように，座標x_lで微分する操作$\partial u_k/\partial x_l$を，commaを使って$u_{k,l}$と簡便に表す)弾性ひずみ$\varepsilon_{kl}$とeigenstrain ε^*_{kl}の和が全ひずみである．

$$\gamma_{kl}=\varepsilon_{kl}+\varepsilon^*_{kl} \tag{1·2}$$

応力σ_{ij}は，弾性ひずみε_{kl}に比例し(Hookeの法則)，弾性係数(elastic stiffness)C_{ijkl}を使って

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(=C_{ijkl}(\gamma_{kl}-\varepsilon^*_{kl})) \tag{1·3}$$

となる．このように，一つの辺に同一indexが二度でてきたときは，1, 2, 3を代入して和をとる(総和記号規約)．(1·3)のなかのγ_{kl}は，$u_{k,l}$で置き換えて良い．これは，

$$C_{ijkl}=C_{ijlk}=C_{jikl}(=C_{klij}) \tag{1·4}$$

なる弾性係数の対称性による．この対称性は，歪の対称性と応力の対称性に由来する．括弧内は，熱力学に出てくるMaxwell関係の一例から求まるもので，よく利用される．

弾性エネルギー(弾性ひずみエネルギー，ひずみエネルギー)Eは，弾性エネルギー密度$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2$を使って，物体全体

* 防衛大学校研究協力者
Micromechanics I ～Basic Discussion～; Tsutomu Mori(National Defence Academy, Yokosuka)
Keywords: *micromechanics, eigenstrain, stress, energy discussion*
2016年2月7日受理[doi:10.2320/materia.55.416]

をDとして，

$$E=\int_D \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2dV \tag{1·5}$$

(dVは体積要素)で定義されるが，D内のある領域Vのみにeigenstrain ε^*_{ij}がある場合には，

$$E=-\int_D \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}/2dV \tag{1·6}$$

と同じで，実際の計算が非常に楽になる．式(1·5)から式(1·6)が出てくる理由は，応力の釣り合い式(応力の平衡方程式)と，物体D表面には力が働いていないことによる．この条件を式に書けば，以下となる．

$$\sigma_{ij,j}=0\ in\ D \tag{1·7}$$

$$\sigma_{ij}n_j=0\ on\ \partial D \tag{1·7′}$$

(∂Dとは物体Dの表面のことである)n_jは，物体Dの表面に立てた単位の法線ベクトルである．式(1·6)を導く際の数式処理中では，部分積分(Green–Gaussの定理)を使うが，詳しいことは文献(4)～(7)に書いてある．式(1·7)，(1·7′)は，たいていの力学の本に説明がある．力学の本ではないが，実際問題に役に立つNyeの本も，これらを説明しており[9]，分かり易い図もある．Nyeにあるように式(1·7′)は，単位の法線n_jを持つある面に働く単位面積当たりの力X_i(面力)と応力σ_{ij}の関係

$$X_i=\sigma_{ij}n_j \tag{1·7″}$$

からきている．

1·2　eigenstrainの周期的分布

マイクロメカニックスは，ひずみや応力を対象とする．そこで，私が習ったひずみや応力を求めるある一つの基本的取扱いをまず述べる．一見難しいので，ざっとだけ見てほしい．Muraの本[10]にあるeigenstrainが周期的に分布している場合(pages 7～11)で，ここにコピーする．こういう場合の特殊例や，合成によっていろいろな問題が解ける．今節の目的は，順番に少しずつ組立てて行けば，利用すべき解が出てくることを示すことでもある．結果だけを羅列することは良くない．まず，

$$\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x})=\bar{\varepsilon}^*_{ij}(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{1·8}$$

のようにeigenstrainが周期的に分布するとする．($i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}=i\xi_m x_m=i(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3)$, $i=\sqrt{-1}$))．

当然，これによって生じる変位は

$$u_m(\boldsymbol{x})=\bar{u}_m(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{1·9}$$

となる．(この理由を考えて下さい)この勾配は

$$u_{m,n}(\boldsymbol{x})=\bar{u}_m(\xi)i\xi_n\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{1·10}$$

である．したがって応力は

$$\begin{aligned}\sigma_{kl}(\boldsymbol{x})&=C_{klmn}(u_{m,n}-\varepsilon^*_{mn})\\&=C_{klmn}\{\bar{u}_m(\xi)i\xi_n\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})-\bar{\varepsilon}^*_{mn}(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\}\end{aligned} \tag{1·11}$$

となる．ここで，括弧内に全ひずみγ_{mn}でなく，変位の勾配(distortion，変形勾配)を使ったが，これは弾性係数C_{klmn}の対称性による(1·4)．釣り合いの式(1·7)($\sigma_{kl,l}=0$)を使うと

$$C_{klmn}\{-\bar{u}_m(\xi)\xi_l\xi_n\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})-i\xi_l\bar{\varepsilon}^*_{mn}(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\}=0 \tag{1·12}$$

を得る．ここで，

$$\bar{\varepsilon}^*_i=-iC_{ijmn}\xi_j\bar{\varepsilon}^*_{mn} \tag{1·13}$$

$$K_{im}=C_{ilmn}\xi_l\xi_n \tag{1·14}$$

を定義する．($K_{mi}=K_{im}$である．式(1·14)を見よ)これらより式(1·12)は，

$$K_{im}\bar{u}_i=\bar{\varepsilon}^*_m \tag{1·15}$$

の時成立することが分かる．これは，$\bar{u}_i$を未知数とする三元連立一次方程式である．式(1·15)を具体的に書きだすと

$$\begin{aligned}&(m=1)\quad K_{11}\bar{u}_1+K_{21}\bar{u}_2+K_{31}\bar{u}_3=\bar{\varepsilon}^*_1\\&(m=2)\quad K_{12}\bar{u}_1+K_{22}\bar{u}_2+K_{32}\bar{u}_3=\bar{\varepsilon}^*_2\\&(m=3)\quad K_{13}\bar{u}_1+K_{23}\bar{u}_2+K_{33}\bar{u}_3=\bar{\varepsilon}^*_3\end{aligned} \tag{1·16}$$

となる．標準的な方法でこれを解くと，

$$\bar{u}_i(\xi)=\frac{N_{im}(\xi)}{D(\xi)}\bar{\varepsilon}^*_m(\xi)=\frac{N_{im}(\xi)}{D(\xi)}(-i\xi_nC_{mnpq}\bar{\varepsilon}^*_{pq}(\xi)) \tag{1·17}$$

となり，変位は，

$$u_i(\boldsymbol{x})=\frac{N_{im}(\xi)}{D(\xi)}(-i\xi_nC_{mnpq}\bar{\varepsilon}^*_{pq}(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})) \tag{1·18}$$

として求まる．ここで，N_{im}はK_{im}をマトリックスとした行列の余因子，Dはこのマトリックスの行列式である．等方等質物質，立方晶，六方晶の場合のN_{im}とDがMura[10]の本に書いてあって(pages 13, 14)便利である．

次に単一周期でなく，色々な周期のeigenstrainが連続的に分布している場合を考える．つまり，式(1·8)を

$$\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_1\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_2\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_3\bar{\varepsilon}^*_{ij}(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{1·19}$$

のように拡張するのである．$\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x})$が分かっているときは，$\bar{\varepsilon}^*_{ij}(\xi)$は

$$\bar{\varepsilon}^*_{ij}(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\int_{-\infty}^{\infty}dx_3\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x})\exp(-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{1·20}$$

から求まる．ここで想像をたくましくすると，式(1·19)，(1·20)場合，変位，変形勾配，ひずみは，

$$\begin{aligned}u_i(\boldsymbol{x})=&\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_1\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_2\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_3\frac{N_{im}(\xi)}{D(\xi)}\\&\times(-i\xi_nC_{mnpq}\bar{\varepsilon}^*_{pq}(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}))\end{aligned} \tag{1·21}$$

$$\begin{aligned}u_{i,j}(\boldsymbol{x})=&\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_1\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_2\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_3\frac{N_{im}(\xi)}{D(\xi)}\\&\times(\xi_j\xi_nC_{mnpq}\bar{\varepsilon}^*_{pq}(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}))\end{aligned} \tag{1·22}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(\boldsymbol{x})=&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_1\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_2\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_3\frac{\xi_nC_{mnpq}\bar{\varepsilon}^*_{pq}(\xi)}{D(\xi)}\\&\times(\xi_jN_{im}(\xi)+\xi_iN_{jm}(\xi)\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}))\end{aligned} \tag{1·23}$$

から計算できることが分かる．一見ややこしいが，こういうのを利用すると転位による変位，応力も順番に求まる．また，弾性係数に異方性がある場合にも使えることになる．また，N_{im}/DのFourier変換であるGreen関数を使って，変位，応力のGreen関数表示へとつながる．

この節を読み直し，文献(4)を眺めてびっくりした．以上

は，殆ど文献(4)にあるものと同じだからである．勘弁して下さい．文献(4)やMuraの本[10]の有用な結果だけを引用するなら，公式集と殆ど同じになってしまう．考え方を組み立てるのが大切だと考えていると，重複が起ってしまう．Muraの教え[8]には逆らっていない．

1·3　楕円体介在物，Eshelby，Mura

マイクロメカニックスはJ. D. Eshelbyの楕円体介在物の論文[11]から始まったと言う人がいるくらいであり，固体力学の分野で最も多く引用されている論文である[12]．しかし，マイクロメカニックスの進歩を紹介，解説しても，Eshelbyを引用していないものもある[2]．とは言え，Eshelbyの論文がすごいことは事実である．この論文は難しいが，一行，一行読めば分かり，極めて有用である．しかも，数か所に出てくるideasがすごい．この論文のすごさは，わが師の名著[10]，“Micromechanics of Defects in Solids”を読んでも分かる．Muraは，Eshelbyの楕円体介在物の論文を，この本のPrefaceの中でも取り上げ，celebrated paperと呼び，特別なものと考えている．勿論，難しい堀さんの著書にも[3]，Eshelbyは出てくる．

Eshelbyのpaperでのありがたいところの一つは，“領域Vが楕円体で，Vのなかに一様なeigenstrain ε^*_{kl}が存在するときには，Vのなかの全ひずみγ_{ij}も一様(一定)になる”ことを示した点にある．(この証明がすごいのである)すなわち，

$$\gamma_{ij}(V)=S_{ijkl}(V)\varepsilon^*_{kl} \tag{1·24}$$

である．$S_{ijkl}(V)$と書いたのは，これが楕円体の形で決まることを示すためである．S_{ijkl}をEshelby tensorと呼ぶ．Eshelbyは，このことを弾性係数が等方的な場合に証明し(この証明がすごい)ている．S_{ijkl}は，一般的には弾性係数C_{ijkl}にも依存する．等方等質物体では，この弾性係数依存性はPoisson比だけで表せる．勿論Eshelbyは，S_{ijkl}を楕円体の形(軸比)で書く方法を与えている．Muraの本には，幾つかの代表的楕円体の場合のS_{ijkl}と応力の具体的表示がある[10]．楕円体中の応力

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(V)(=C_{ijmn}\varepsilon_{mn}(V))=C_{ijmn}(S_{mnkl}(V)\varepsilon^*_{kl}-\varepsilon^*_{mn}) \tag{1·25}$$

も，勿論一定となる．

このEshelby問題は，木下–Muraによって弾性係数に異方性がある物体に拡張されている[13]．異方性物体でも，S_{ijkl}をEshelby tensorと呼ぶ．異方性物体の場合，S_{ijkl}を求めるには，一般的には数値積分を必要とする．しかし，特別なVの場合には簡単に書ける．あとでその例が出てくる．この楕円体介在物の性質を使えば，eigenstrainを持つ楕円体が作る弾性ひずみと応力により物体全体にたくわえられる弾性エネルギーは，

$$E=-\boldsymbol{\sigma}_{ij}(V)\varepsilon^*_{ij}(V)V/2 \tag{1·26}$$

として掛け算で求まる．便利である．

この節のheadingにMuraを入れた理由を述べる．Muraは，木下–Muraの論文でEshelbyの介在物問題を異方性へと拡張しただけでなく，さらに介在物の力学を発展させたからである．例えば，式(1·23)からEshelby tensorがでるが，このような無限大領域の積分でなく，二次元または一次元の有限領域での積分の形に書き換えることも行ったのである．つまり，介在物の場の計算方法を発展させ，さらに介在物の外側の場まで求める手段の定式化まで行ったのである．これらのことは，Muraの本を読めば分かる[10]．

1·4　平板状領域

この問題を基本概念に入れるのをためらうが，役に立つのでまとめておく．例えば，マルテンサイトの力学，Ni基超合金(γ–γ'合金)に存在するγ channel中の応力解析である．平板状領域(V)の外側へ向けて立てた単位法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$とする．この問題の場合，$\bar{\varepsilon}^*_{ij}(\xi)$をうまくとると，

$$\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\varepsilon}^*_{ij}(\xi)\exp(i\xi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})d\xi \tag{1·27}$$

は，Vの中で一定のε^*_{ij}をとり，Vの外ではeigenstrainがゼロとすることができる．変位勾配は，式(1·22)を書き直して

$$u_{i,j}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_{im}(\xi\boldsymbol{n})}{D(\xi\boldsymbol{n})}\xi^2 n_j n_n C_{mnpq}\bar{\varepsilon}^*_{pq}(\xi)\exp(i\xi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})d\xi \tag{1·28}$$

である．式(1·27)と(1·28)中のξは正と負を取りうるscalarである．Dはξの6次，Nはξの4次，式(1·28)中の分子にはξの2次があるので，式(1·28)は，

$$u_{i,j}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_{im}(\boldsymbol{n})}{D(\boldsymbol{n})}n_j n_n C_{mnpq}\bar{\varepsilon}^*_{pq}(\xi)\exp(i\xi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})d\xi \tag{1·29}$$

と直せる．さらにξを含まない項を積分の外に出して

$$u_{i,j}(\boldsymbol{x})=\frac{N_{im}(\boldsymbol{n})}{D(\boldsymbol{n})}n_j n_n C_{mnpq}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\varepsilon}^*_{pq}(\xi)\exp(i\xi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})d\xi \tag{1·30}$$

としても良い．この積分項は式(1·27)そのものなので，

$$u_{i,j}(\boldsymbol{x})=\frac{N_{im}(\boldsymbol{n})}{D(\boldsymbol{n})}n_j n_n C_{mnpq}\varepsilon^*_{pq}(\boldsymbol{x}) \tag{1·31}$$

となる．応力は，

$$\boldsymbol{\sigma}_{kl}(\boldsymbol{x})=C_{klij}\left\{\frac{N_{im}(\boldsymbol{n})}{D(\boldsymbol{n})}n_j n_n C_{mnpq}\varepsilon^*_{pq}(\boldsymbol{x})-\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x})\right\} \tag{1·32}$$

となる．ここで，ひずみが対称であることを無視するというさぼり行為をして，上式を書き直す．まず，

$$u_{i,j}=S_{ijpq}\varepsilon^*_{pq} \tag{1·33}$$

とする．ここで，S_{ijpq}は

$$S_{ijpq}=\frac{N_{im}(\boldsymbol{n})}{D(\boldsymbol{n})}n_j n_n C_{mnpq} \tag{1·34}$$

である．式(1·34)が平板状領域のEshelby tensorであり，式(1·33)がこの領域に一定のeigenstrainが入ったときのこの領域内の一様な全ひずみを与える表現となる．

ここで，

$$\boldsymbol{n}=(001),\quad n_1=n_2=0,\quad n_3=1 \tag{1·35}$$

という特別な場合を考える．板状領域が，x_3方向に垂直な

場合である．この時，式(1·31)より，

$$u_{i,1}=u_{i,2}=0 \tag{1·36}$$

である．また，この板状領域内に生じる eigenstrain が

$$\varepsilon^*_{11}=\varepsilon^*_{22}=\varepsilon^*_{12}=0 \tag{1·37}$$

の場合，この領域内に生じるすべての応力はゼロになる．一例として ε^*_{33} のみ存在しているとしよう．式(1·32)より，このときの応力は，

$$\sigma_{kl}=C_{klij}\frac{N_{im}(\boldsymbol{n})}{D(\boldsymbol{n})}n_j n_n C_{mn33}\varepsilon^*_{33}-C_{kl33}\varepsilon^*_{33} \tag{1·38}$$

であるが，式(1·35)に注意すると，これは次のようになる．

$$\sigma_{kl}=C_{kli3}\frac{N_{im}(\boldsymbol{n})}{D(\boldsymbol{n})}C_{m333}\varepsilon^*_{33}-C_{kl33}\varepsilon^*_{33} \tag{1·39}$$

ここで，

$$A_{kl}=C_{kli3}\frac{N_{im}}{D}n_j n_q C_{mj3q} \tag{1·40}$$

なる量を考える．$\boldsymbol{n}=(001)$なので，上式は式(1·38)の第一項の係数と同じになる．式(1·14)の K_{im} の定義を思い出すと，

$$A_{kl}=C_{kli3}\frac{N_{im}}{D}n_j n_q C_{mj3q}=C_{kli3}\frac{N_{im}}{D}K_{m3} \tag{1·41}$$

となる．連立一次方程式で習ったこと(行列，行列式，余因子のこと等)

$$N_{im}K_{mr}=D\delta_{ir} \tag{1·42}$$

から，式(1·41)は，

$$C_{kli3}\frac{N_{im}}{D}n_j n_q C_{mj3q}=C_{kli3}\frac{N_{im}}{D}K_{m3}=C_{kli3}\delta_{i3}=C_{kl33} \tag{1·43}$$

となる．これを式(1·37)に入れると，

$$\sigma_{kl}=C_{kl33}\varepsilon^*_{33}-C_{kl33}\varepsilon^*_{33}=0 \tag{1·44}$$

である．つまり，ε^*_{33} だけが存在しているときは，平板状領域内の応力はゼロである．同じことを ε^*_{31} と ε^*_{32} だけが存在しているときに繰り返せば，$\varepsilon^*_{31}, \varepsilon^*_{32}$ があっても，応力は生じないことが理解できる．まとめると，x_3 方向に垂直な平板状介在物内では，$u_{i,1}=u_{i,2}=0$，であり，$\varepsilon^*_{33}, \varepsilon^*_{31}, \varepsilon^*_{32}$ は応力を作らないということである．(この結論の説明にもたもたしたのは，私の能力の低さのためである．乞う寛容)なお，北大の加藤博之先生は，以上の特殊例を別の方法で示してくれた(14)．

1·5　エネルギー利用法，力

私は，エネルギーを算えて議論の展開の利用することが，生きて行く上に役に立つと思ってきた．どんなエネルギーを算えるべきかは，教養課程でならった力学，熱力学に忠実に従えばいいのだが，この問題で，昔勉強した Eshelby が書いていることを思いだした．

Eshelby が卓見を述べたある総合的な paper は，まずエネルギー論と，エネルギーから定義される力の定義から始まる(15)．ここで少し言葉は違うが Eshelby の真似を多少する．

物体の持つ弾性エネルギーは，その物体の持つ Helmholtz エネルギーである．ただし，定温変化だけを考えた場合である．これに，熱力学に出てくる PV に相当する項を加えれば，Gibbs エネルギーとなる．$-PV$ は，一定圧力 P が物体の体積変化に応じてする仕事である．見方を変えると，PV は一定圧力 P の位置エネルギーである．物体の Helmholtz エネルギーに，実際には外力が持っているその位置エネルギーを加えて，かつ物体に責任を負わせて，物体の Gibbs エネルギーと言う．Eshelby は全エネルギー(total energy)と書いている．

ある転位を含む物体を考える．適当な外力もかけておく．この転位を仮想的に δx だけ動かしたとき，全エネルギーが δF だけ変化したら，転位に働く力 f を

$$f=-\partial F/\partial x \tag{1·45}$$

で定義する．この f を，generalized force と言う．Configurational force と呼んでいる一派もある．この定義は力学，熱力学の教えの通りである．ここにある F は全エネルギー(Gibbs エネルギー)である．厳密には，$\boldsymbol{\delta x}$ には成分があるので，力にも成分があると理解してほしい．転位に働く力(Peach–Koehler force)は σb であると習ったが，これは式(1·45)から来ている．全エネルギーなので，外部応力だけでなく，他の転位，析出物が作る応力がここの σ に現れる．対象とした転位自身の作る応力(分かり易い例は，転位の曲りによって発生する応力)も入る．

後で，個別問題を議論する時に別箇の定式化をするが，頻繁に使われる“相互作用”なる言葉をここで議論する．対象とする量はなんでも良いのであるが，とりあえず弾性エネルギー E をとりあげる．

eigenstrain $\varepsilon^*_{ij}(V_1)$ をもつ領域 V_1 が弾性ひずみ $\varepsilon_{ij}(V_1)$ と応力 $\sigma_{ij}(V_1)$ を作るとする．$\varepsilon_{ij}(V_1)$ と $\sigma_{ij}(V_1)$ は場所によって変わっているとする．もう一つの領域 V_2 があり，これは eigenstrain $\varepsilon^*_{ij}(V_2)$ を持ち，弾性ひずみ $\varepsilon_{ij}(V_2)$ と応力 $\sigma_{ij}(V_2)$ を作るとする．Hooke の法則を仮定しているので，V_1 と V_2 が共存しているときは，弾性ひずみも応力も重ね合わせが効く．この場合，V_1 と V_2 が共存しているときの弾性エネルギーは，

$$E(V_1,V_2)=(1/2)\int_D(\sigma_{ij}(V_1)+\sigma_{ij}(V_2))(\varepsilon_{ij}(V_1)+\varepsilon_{ij}(V_2))dV \tag{1·46}$$

である．D は物体全体を表す．これの括弧を外して，

$$\begin{aligned}E(V_1, V_2)&=(1/2)\int_D\sigma_{ij}(V_1)\varepsilon_{ij}(V_1)dV+(1/2)\int_D\sigma_{ij}(V_2)\varepsilon_{ij}(V_2)dV\\&\quad+(1/2)\int_D\sigma_{ij}(V_1)\varepsilon_{ij}(V_2)dV+(1/2)\int_D\sigma_{ij}(V_2)\varepsilon_{ij}(V_1)dV\end{aligned} \tag{1·47}$$

とする．

第一項は V_1 のみが存在するときの弾性エネルギーであり，第二項は V_2 のみが存在しているときの弾性エネルギーである．両者共存の場合は，これらの和だけでなく，第三項と第四項を加えなくてはいけない形となっている．このような場合，V_1 と V_2 とは“弾性エネルギーに関して，相互作

用を持つ”と言う．いい例は，転位と溶質原子である．そして，第三項と第四項の和を，相互相作用の弾性エネルギー$E_{\mathrm{I}}(V_1, V_2)$と呼ぶ．多くの場合，これだけを算えれば，次の議論の展開に十分である．そして，使い易い計算法がある．この計算法の導出は楽であるのだが昔やったので[6]，ここに書くのはみっともないのでやめる．そこで結果だけを書く．

相互作用の弾性エネルギーはまとめて

$$E_{\mathrm{I}}(V_1, V_2) = -\int_{V_2} \sigma_{ij}(V_1)\varepsilon^*_{ij}(V_2)dV = -\int_{V_1} \sigma_{ij}(V_2)\varepsilon^*_{ij}(V_1)dV \tag{1·48}$$

で算えられる．積分記号なんて書いたが，掛け算で済ますことが多い．例えば，Cottrell雰囲気形成の原因である転位と溶質原子の組を考える場合，たいてい式(1·48)で，$\sigma_{ij}(V_1)$を転位の作る応力，溶質原子のmisfitをeigenstrain $\varepsilon^*_{ij}(V_2)$として，

$$E_{\mathrm{I}}(V_1, V_2) = -V_2\sigma_{ij}(V_1)\varepsilon^*_{ij}(V_2) \tag{1·49}$$

ですませる．

この問題の転位の応力の代わりに，我々が扱っている物体に働いている応力として，この物体の表面に力(面力，traction)を与えて作る外部応力σ^A_{ij}の効果(外力とε^*_{ij}をもつ領域Vとの間の相互作用)を論じる場合もある．この場合，式(1·48)や(1·49)と同形の表式が使える．そして良く，別の記号を使う．例えば，式(1·49)に対応するものとして，

$$F_{\mathrm{I}} = V\sigma^A_{ij}\varepsilon^*_{ij}(V) \tag{1·50}$$

とする．この際面倒なので，V_1の代わりにVと書いた．$V\sigma^A_{ij}\varepsilon^*_{ij}(V)$は，$\sigma^A_{ij}$を作る外力が，$V$に$\varepsilon^*_{ij}(V)$を発生させる時に行う仕事である．(この意味で，$\varepsilon^*_{ij}$が塑性歪の場合には，$V\sigma^A_{ij}\varepsilon^*_{ij}(V)$をよく塑性仕事と呼ぶ)あるいは，$-V\sigma^A_{ij}\varepsilon^*_{ij}(V)$は，$V$に$\varepsilon^*_{ij}(V)$が発生するときに，一定の外力が持つ位置エネルギーの変化と見れば良い．あるいは，Vでの応力がσ^A_{ij}になるまで引っ張り試験機を動かし，cross headを固定する．このあと，Vにeigenstrain ε^*_{ij}を発生させる．このとき，物体と引っ張り試験機を一体(一つの大きな物体)とみなして，σ^A_{ij}を，一つの内部応力と考えてしまう．こうすれば，$-V\sigma^A_{ij}\varepsilon^*_{ij}(V)$は$\sigma^A_{ij}$と$V$との間の相互作用の弾性エネルギーと見ることができる．cross headを固定しているので，Vにeigenstrain ε^*_{ij}が発生しても，外力は仕事をしない．

要は，我々の対象物(転位，析出物，介在物等)を含む物体の平衡，変化の進む向きを議論する際に用いるエネルギー量を，全エネルギーとして算えればいいのである．これから力も出るし，安定，不安定の判断や，どんな状態が優先して起きるかも判断できる．こんな考えは，BCC金属中に存在する侵入型不純物原子のSnoek orderingの議論(F_{I}を利用)や，misfitを持つ二つの析出物が特定の方向と距離に配列するという問題(E_{I}を利用)の理解に役立つ．

(次号へつづく)

文　　献

(1) Kenkyusha's English–Japanese Dictionary for the General Reader, ed. by T. Matsuda, Kenkyusha, (1994).
(2) 皆川七郎：精密工学会誌，**54**(1988), 1012–1016.
(3) S. Nemat–Nasser and M. Hori: Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials, North Holland, (1998).
(4)〜(6) 森　勉：金属学会会報，**17**(1978), 821–829, 920–927, **18**(1979), 37–47.
(7) 加藤雅治：まてりあ，**47**(2008), 375–380.
(8) 村外志夫：ふぇらむ，**2**(1997), 527–533.
(9) J. F. Nye: Physical Properties of Crystals, Oxford, (1957), 83–89.
(10) T. Mura: Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff, (1987).
(11) J. D. Eshelby: Proc. Roy. Soc., A**241**(1957), 376–390.
(12) Shaofan Li: IMechanica, (2006), The Most Cited Scientific Papers in Solid and Computational Mechanics.
(13) N. Kinoshita and T. Mura: Phys. Stat. Sol. (a), **5**(1971), 759–768.
(14) 加藤博之：北海道大学工学部，私信．
(15) J. D. Eshelby: The Continuum Theory of Lattice Defects, Solid State Physics, Academic Press, (1956), 79.

森　勉

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★
1957年　東京工業大学卒業(金属工学科)
1957年　東京工業大学助手(金属工学科)
1968年　東京工業大学助教授(金属工学科)
1975年　東京工業大学教授(材料科学専攻)
1995年　リヨービ　嘱託(研究部)
1996年以降，幾つかの大学・研究所への行脚と修行
2013年–　現在に至る
専門分野：金属材料の力学的性質
★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★