ミニ特集　金属製造プロセスへの粒子法の応用

流動現象への粒子法の応用

角　田　和　彦*

1. はじめに

粒子法は，差分法や有限要素法といった格子や要素を用いた数値解析法とは異なり，速度や圧力を保持しながら移動する粒子を用いて物体の挙動を計算するメッシュレス法である．そのため，格子法で行う煩雑なメッシュ作成の手間を必要としないという特徴がある．また，粒子法は完全ラグランジュ法であることから移流項の離散化を行わないため，移流項により生じる数値拡散が発生しないという特徴も有する．代表的な粒子法として，SPH（Smoothed Particle Hydrodynamics）法[1][2]と MPS（Moving Particle Semi-implicit）法[3]–[5]がある．SPH 法は基本的には圧縮性流れの計算手法であり，主に宇宙物理学の分野で使用されてきた．その後，SPH 法は非圧縮性流れへの適用もされてきている[6][7]．また，MPS 法は，粒子法に非圧縮性流れの計算アルゴリズムを組み込んだ手法である．SPH 法，および MPS 法ともに液体表面や界面の大きな挙動を伴う解析に優れているため，最近では液体表面流れや混相流等の解析に広く利用されている．しかしながら，特に標準的な MPS 粒子法シミュレーションでは，圧力に関するポアソン方程式を解く際に，擬似的な圧力振動解が発生することが知られている．その擬似的振動の発生原因の一つとして，特異性を有するカーネル関数の採用が挙げられる．

本稿では，流動現象に関する粒子法の適用，特に流動に伴って液体表面が大きく変動するような場合のコンピュータシミュレーション技術および解析事例について解説する．

2. 粒　子　法

ここでは，流動現象に関する粒子法の解析例として，SPH 法及び MPS 法について概説する．

(1) 支配方程式

流動現象の数理モデルとして知られている粘性流体の運動は，以下の Navier-Stokes 方程式に適当な初期条件と境界条件を伴って支配されている．

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}p_{,i} + \Theta_i + f_i \qquad \text{in } T\times\Omega \tag{1}$$

ただし，Ω は空間領域，T は時間間隔，u_i は速度ベクトル成分，p は圧力，ρ は密度，Θ_i は粘性項，f_i は外力項，および D/Dt はラグランジュ微分を表す．

(2) SPH 法

SPH 法[1][2]に関する定式化として，ある関数 $f(x)$ と滑らかなカーネル関数 $W(x, r_e)$ を用いて，以下のように積分表現することができる．

$$f(x) = \int_\Omega f(x')\,W(x-x', r_e)\,dx' \tag{2}$$

ただし，r_e は影響半径を表し（図 1 参照），以下の正規化された条件を満足する．

$$\int_\Omega W(x-x', r_e)\,dx' = 1 \tag{3}$$

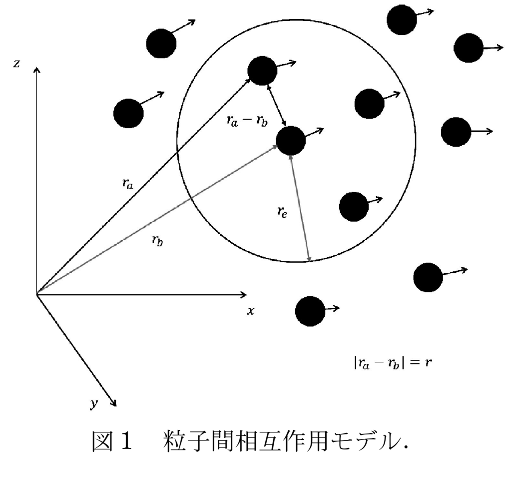


図 1　粒子間相互作用モデル．

* 日本大学教授；生産工学部数理情報工学科（〒275-8575 習志野市泉町 1-2-1）
Applications of Particle Methods to Fluid-flow Phenomena; Kazuhiko Kakuda (Department of Mathematical Information Engineering, College of Industrial Technology, Nihon University, Narashino)
Keywords: *particle method, sph(smoothed particle hydrodynamics), mps(moving particle semi-implicit), fluid-flow, collapse of a water column, liquid ring pump, rotating impeller*
2015年 5 月 7 日受理[doi:10.2320/materia.54.449]

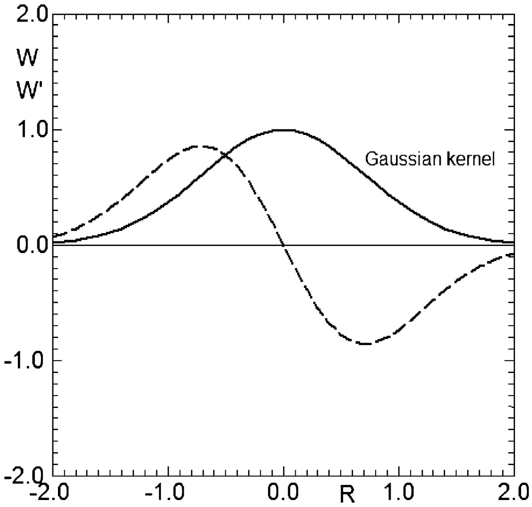


図２　Gaussian 関数とその微分量.

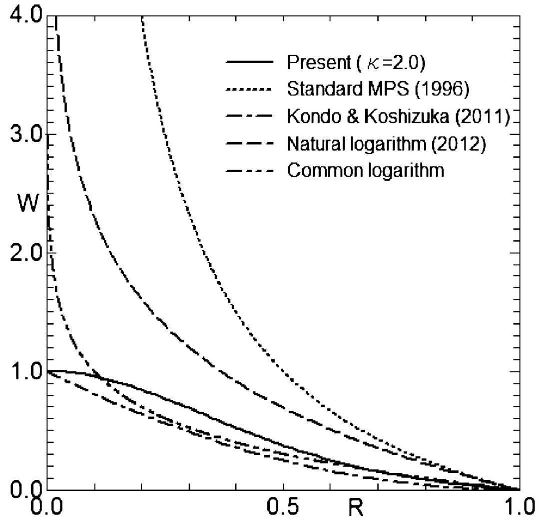


図３　種々のカーネル関数分布.

ここで，カーネル関数 $W(x, r_e)$には，一般的に Gaussian 関数(図２参照：$R=r/r_e$)，３次以上の Spline 関数等が使用されている[8].

式(２)の粒子 a での近似式(あるいは，離散化式)は次式で与えられる.

$$\langle f(x_a)\rangle=\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f(x_b)\, W_{ab} \qquad (4)$$

ただし，m_b と ρ_b は，それぞれ粒子 b での質量と密度を表し，および，$W_{ab}=W(x_a-x_b, r_e)$と表される.

また，２つの粒子 a と b 間に対する粒子 a での発散モデルは，次式のように表現することができる.

$$\langle \nabla\cdot f(x_a)\rangle=-\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f(x_b)\cdot\nabla_a W_{ab} \qquad (5)$$

ただし，∇ は勾配ベクトルを表す.

(3) MPS 法

MPS 法は，上述の SPH 法のようにある関数の積分表現をするのではなく，カーネル関数(あるいは，重み関数)を用い支配方程式に現れる勾配，発散，ラプラシアン等に関して，図１の粒子間相互作用モデルを用意し，ある関数を直接，離散化するアプローチである[3].

例えば，粒子 a での粒子数密度$\langle n\rangle_a$ は次式のように表現される.

$$\langle n\rangle_a=\sum_{b\neq a} w(|r_b-r_a|) \qquad (6)$$

ただし，$w(r)$はカーネル関数(あるいは，重み関数)であり，標準的な MPS 法では次式を用いる.

$$w(r)=\begin{cases}\dfrac{r_e}{r}-1 & (0<r<r_e)\\ 0 & (r_e\le r)\end{cases} \qquad (7)$$

式(７)の関数は粒子間距離 $r=0$ で特異性を有しているが，他にも対数型関数[9]や特異性を含まない関数等[5][10]が採用され(図３参照)，それらの適用性が調べられている.

また，粒子 a での勾配モデルとラプラシアンモデルはそれぞれ以下のように与えられる.

$$\langle \nabla\phi\rangle_a=\frac{d}{n^0}\sum_{b\neq a}\left[\frac{\phi_b-\phi_a}{|r_b-r_a|^2}(r_b-r_a)w(|r_b-r_a|)\right] \qquad (8)$$

$$\langle \nabla^2\phi\rangle_a=\frac{2d}{\lambda n^0}\sum_{b\neq a}[(\phi_b-\phi_a)w(|r_b-r_a|)] \qquad (9)$$

ただし，d は次元数，n^0 は初期配置での粒子数密度，ϕ_a と ϕ_b はそれぞれ粒子 a と b のスカラー関数，および λ は統計的分散の増加を解析解と一致させるための係数を表す.

MPS 法では圧力の空間的および時間的変動が激しい事が報告されているため，近藤・越塚らによって圧力の時間方向への高精度安定化手法が提案されている[5]．この手法は，既に非圧縮性粘性流体解析でも多く見受けられる考え方であり，特に，圧力の基となる密度変化に関する解の精度を向上させた手法といえる．圧力計算に関する標準的 MPS 法では式(10)を用い，また，その時間方向への高精度安定化手法は式(11)のように与えられる.

$$\frac{1}{\rho^0}\langle \nabla^2 p^{k+1}\rangle_a=-\frac{1}{\Delta t^2}\frac{\langle n^*\rangle_a-n^0}{n^0} \qquad (10)$$

$$\frac{1}{\rho^0}\langle \nabla^2 p^{k+1}\rangle_a=-\frac{\langle n^*\rangle_a-2\langle n^k\rangle_a+\langle n^{k-1}\rangle_a}{n^0\Delta t^2}-\frac{\beta}{\Delta t}\frac{\langle n^k\rangle_a-\langle n^{k-1}\rangle_a}{n^0\Delta t}-\frac{\gamma}{\Delta t^2}\frac{\langle n^k\rangle_a-n^0}{n^0} \qquad (11)$$

ただし，$\beta(=0.5)$と $\gamma(=0.05)$は安定化パラメータ，k は k–時刻ステップ，n^*は粒子移動後の仮粒子数密度を表す.

3. 数値解析例

これまで展開してきた粒子法解析の妥当性および適用性を検証するために，具体的な解析例として，水柱崩壊流れ問

題[11]（あるいは，ダム崩壊流れ問題）および液封式真空ポンプ内流れの問題[12]に関する実験データ等との比較検討を行う．

(1) 水柱崩壊流れ問題

この問題では，種々のカーネル関数に対するSPH法およびMPS法解析の有効性および適用性を実験値[11]との比較を通して検証する．**図4**に，それぞれ2次元および3次元の計算モデルを示す．また，計算に利用した諸量は**表1**に示す．

図5および**図6**には，種々のカーネル関数を用いたSPH法による2次元および3次元計算モデルにおける粒子/流速挙動の結果をそれぞれ示す．同時刻（$t=0.6$ s）におけるこれらの解析結果を見ても同様な挙動が得られていることが分かる．また，2次元および3次元MPS法による粒子/圧力挙動の結果は，それぞれ**図7**および**図8**に示される．標準的カーネル関数を用いた場合以外は，圧力分布の擬似的な振動が

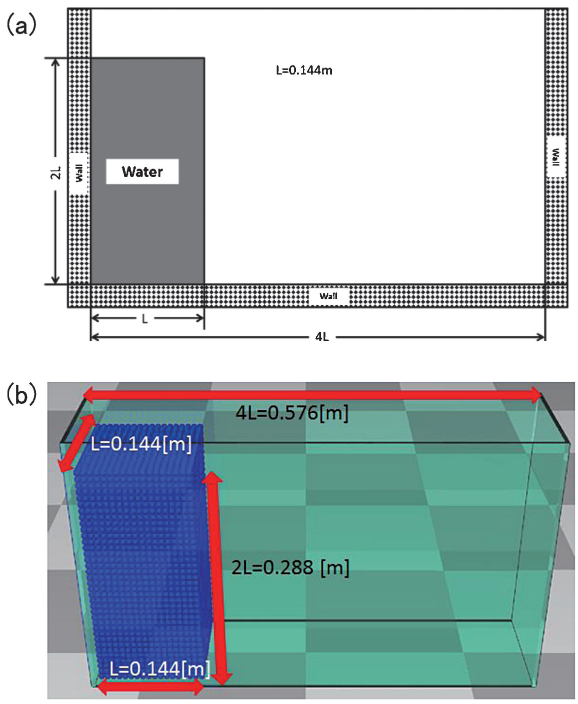


図4　水柱崩壊流れ問題．
(a) 2次元計算モデル　(b) 3次元計算モデル

表1　計算諸量．

解析手法	解析次元	粒子数	動粘性係数 (m^2/s)	初期密度 (kg/m^3)	重力加速度 (m/s^2)	初期粒子間隔 (m)
SPH	2次元	1,559	0.3	1000.0	9.8	0.008
	3次元	37,668	0.3			
MPS	2次元	1,632	1.E−06			
	3次元	75,744	1.E−06			

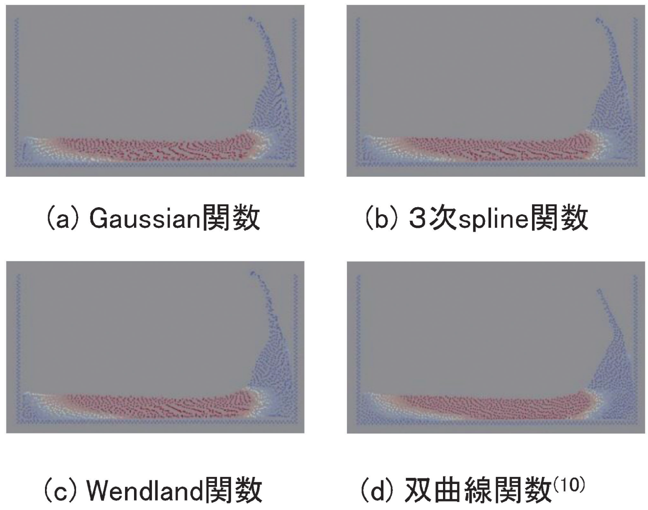


図5　時刻 $t=0.6$ s での粒子/流速挙動（2次元SPH）．

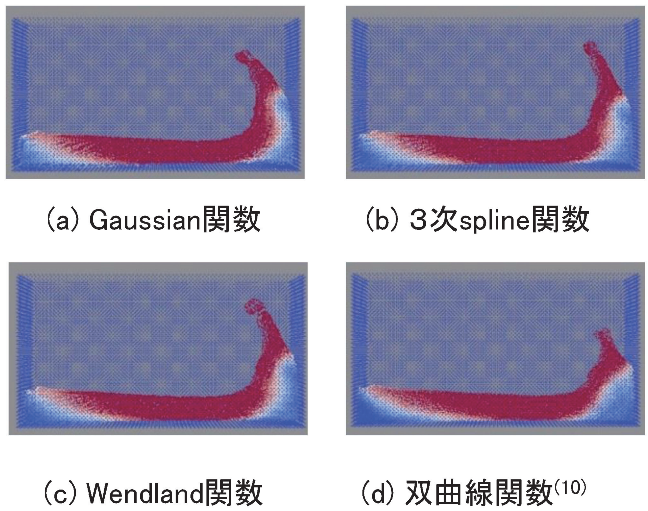


図6　時刻 $t=0.6$ s での粒子/流速挙動（3次元SPH）．

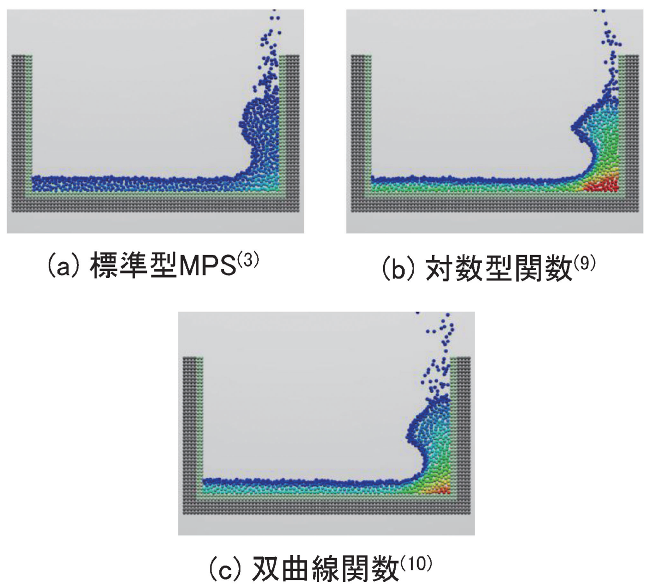
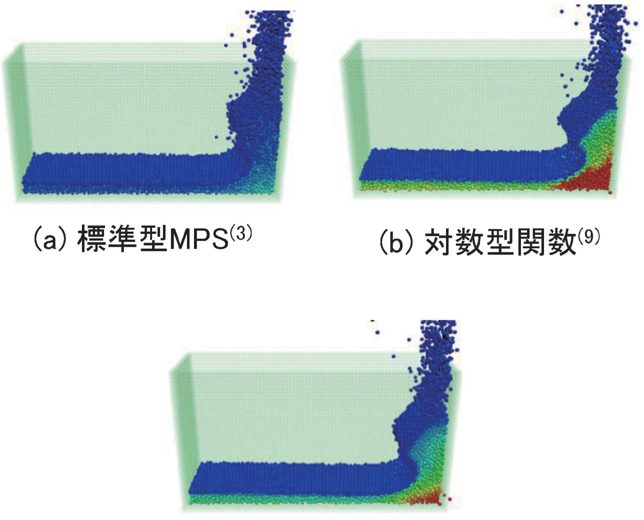


図7　時刻 $t=0.6$ s での粒子/圧力挙動（2次元MPS）．



(a) 標準型MPS(3)　(b) 対数型関数(9)

(c) 双曲線関数(10)

図８　時刻 $t=0.6$ s での粒子/圧力挙動（３次元 MPS）．

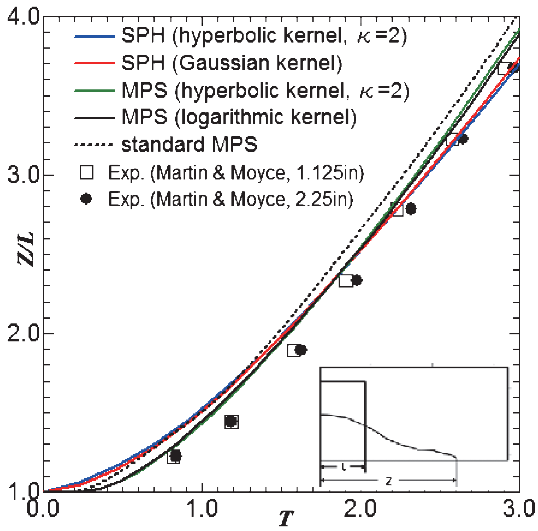


図９　水柱先端位置の実験値との比較（２次元モデル）．

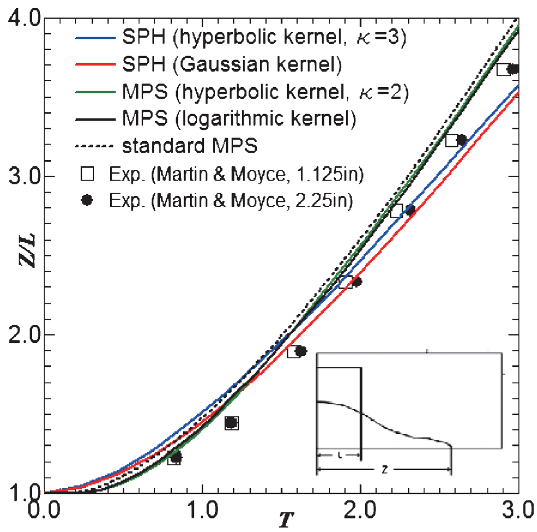


図10　水柱先端位置の実験値との比較（３次元モデル）．

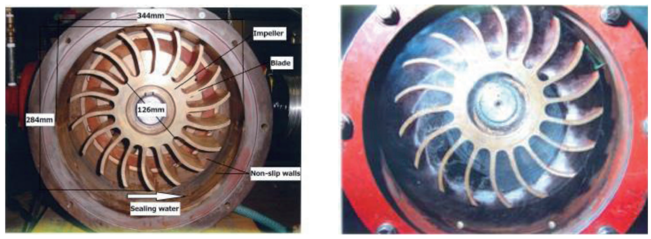


図11　実験モデルとウォータリング形成．

(a)

(b)

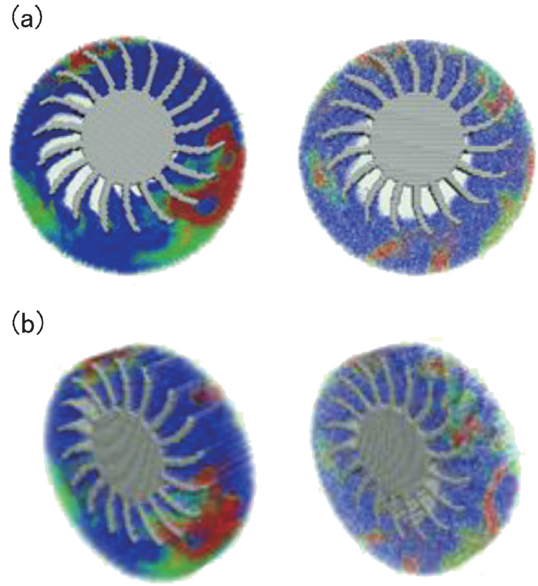


図12　各時刻での粒子/圧力挙動（３次元 MPS）．
(a) ２次元表示（$t=15$ ms（左図）；$t=400$ ms（右図））
(b) ３次元表示（$t=15$ ms（左図）；$t=400$ ms（右図））

抑制されていることが分かる．**図９，10**にそれぞれ２次元および３次元モデルでの水柱が崩壊した右先端の進行を実験値[11]と比較している．標準型 MPS 法解析の結果（点線）を除いて，良好な結果が得られている．なお，両図において $T=t\sqrt{2g/L}$ である．

(2)　液封式真空ポンプ内流れの問題

この問題では，偏心を伴う羽根車の回転によってポンプ内にウォータリングが形成されるという興味深い現象が知られている（**図11**参照）．この問題に関し，圧力安定化 MPS 法[12]による３次元解析の粒子/圧力挙動の結果を**図12**に示す．時間の経過によってウォータリングが形成され，実験データとの定性的な一致が見られる．なお，粒子数は211, 212で，羽根車の回転速度は 2400 rpm と設定している．

4.　お　わ　り　に

本稿では，液面が大きく変動するような場合の流動現象に関する粒子法の適用として，SPH 法と MPS 法の概説および数値解析例を展開してきた．これらの粒子法解析の妥当性

および適用性を検証するために，具体的な解析例として，水柱崩壊流れ問題および液封式真空ポンプ内流れの問題に関する実験データ等との比較検討を行い，以下の点を明らかとした．

(1) 水柱崩壊流れの問題に関し，種々のカーネル関数に対する SPH 法および MPS 法解析を行い，水柱先端位置における実験値との比較を通し，標準型 MPS 法解析を除き，良好な結果が得られた．また，MPS 法に適切なカーネル関数および圧力安定化手法を導入することによって標準型 MPS 法解析で見られた擬似的な圧力振動解の発生が抑えられた．

(2) 液封式真空ポンプ内流れの問題には，圧力安定化 MPS 法を適用し，時間の経過によってポンプ内にウォータリングの形成が確認され，実験データとの定性的な一致が得られた．

文　　献

(1) L. B. Lucy: The Astronomical J., **82**(1977), 1013–1024.
(2) R. A. Gingold and J. J. Monaghan: Mon. Not. R. Astr. Soc., **181** (1977), 375–389.
(3) S. Koshizuka and Y. Oka: Nucl. Sci. Eng., **123**(1996), 421–434.
(4) A. Khayyer and H. Gotoh: Coastal Eng., **56**(2009), 419–440.
(5) M. Kondo and S. Koshizuka: Int. J. Numer. Meth. Fluids, **65** (2011), 638–654.
(6) J. J. Monaghan: J. Comput. Phys., **110**(1994), 399–406.
(7) 酒井譲，楊宗億，丁泳鏞：日本機械学会論文集(B 編)，**70** (2004), 1949–1956.
(8) M. G. Gesteira, B. D. Rogers, R. A. Dalrymple, A. J. C. Crespo and M. Narayanaswamy: User Guide for the SPHysics Code, (2010).
(9) K. Kakuda, S. Obara, J. Toyotani, M. Meguro and M. Furuichi: CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, **83** (2012), 57–72.
(10) K. Kakuda, Y. Hayashi and J. Toyotani: CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, **103**(2014), 229–249.
(11) J. C. Martin and W. J. Moyce: Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A, **244**(1952), 312–334.
(12) K. Kakuda, T. Nagashima, Y. Hayashi, S. Obara, J. Toyotani, S. Miura, N. Katsurada, S. Higuchi and S. Matsuda: CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, **93**(2013), 363–376.

角田和彦

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★
1985年3月　日本大学大学院生産工学研究科博士後期課程修了
1985年4月　日本大学助手　生産工学部
1995年3月　米国スタンフォード大学　客員研究員(一年間)
2005年4月– 現職
専門分野：計算流体工学
◎複雑流れ問題の数値計算法の開発と応用に従事．GPU 等を利用した計算の高速化技術についても活動．
★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★