入門講座

測定の不確かさ評価について

—3.　不確かさの算出手順2—

城　野　克　広*

は　じ　め　に

前々回から4回に渡り，測定の不確かさについて解説しております．第1回は「不確かさとは何か」，前回と今回は「不確かさの算出手順」，第4回に「不確かさの活用」についてお話していきます．今回は，繰返しのばらつきの解析以外の方法による不確かさの算出と，不確かさにも単位があるというお話をします．

3·1　幅だけ分かるときには一様分布

前回は標準偏差を紹介しました．標準偏差とはごく普通のずれのことです．複数の不確かさ要因がある場合には，それらの標準偏差を2乗して，足して，正の平方根を取ったものが，最終的に知りたい値の標準偏差です．

ところが，考えてみると，標準偏差で表された不確かな数値というものは，世の中には実に少ないのです．例えば，「最大30％オフ！」と言われたとき，では，普通は何％オフなのかと勘繰ってしまいます．だからと言って，「悪天候のため新幹線に平均30分，標準偏差15分の遅れが出ております．」と言われたら，ちょっとイライラする気がします．「悪天候のため最大1時間の遅れ」の方が，まだましかも知れません．

他にも前々回のこの解説の冒頭でも述べましたように，「飲料のカロリー表示の誤差の許容範囲は，健康増進法に基づく栄養表示基準により，－20％～＋20％と定められています」とか，「日本の電圧の値は電気事業法によって，95 V～107 V の間に収まっていればよい」など，我々にもっとも身近なばらつき表し方は「○○～△△」あるいは「最小で○○，最大で△△」という表現であると言い切ってよいでしょう．

言い切ったのはよいとして，それでは，「－20％～＋20％の間でばらつく」と言われたとき，不確かさをどう求めるかということは大きな問題です．不確かさの計算には標準偏差が必要です．しかし，自分で実験した結果とは違って，この場合には，①平均を計算し，②平均からの差の二乗和を求め，③それを(データ数－1)で割って正の平方根を取るという手順は使えません．このままでは，不確かさの計算ができないのです．

「－20％～＋20％」なる値の標準偏差はどうなるか？早速ですが，結論を言ってしまいましょう．「－20％～＋20％」なる値の標準偏差は$20/\sqrt{3}$％＝11.5…％とします．

もちろん，なぜ$\sqrt{3}$？　という疑問が湧くことでしょう．この背景には，**図3.1**(a)に示す確率分布が関係しています．

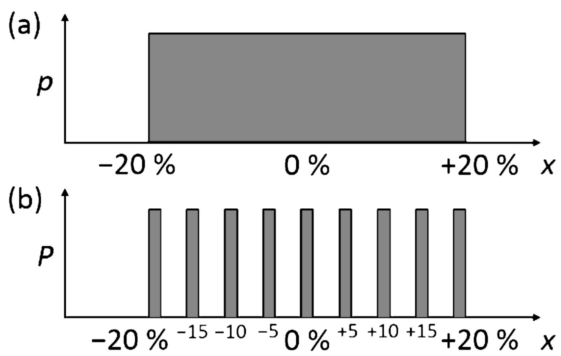

図3.1　(a)－20％から＋20％の範囲で一様な確率を持つ一様分布の確率密度関数と，(b)その一様分布を均等な間隔の値に同一の確率を与えた分布に近似したもの．

* 産業技術総合研究所　物質計測標準研究部門主任研究員(〒305-8565 つくば市東1-1-1)
Things about Measurement Uncertainty —3. How to Evaluate It? (2/2)—; Katsuhiro Shirono (National Institute of Advanced Science and Technology (AIST), Tsukuba)
Keywords: *Uncertainty, Guide to the expression of uncertainty in measurement* (*GUM*)
2014年9月4日受理[doi:10.2320/materia.54.405]

この確率分布は**一様分布**と呼ばれるものです．－20％よりも小さい，または＋20％よりも大きい値が観測される確率はゼロ．一方で，－20％～＋20％の範囲の値が観測される確率は一様です．これが，一様分布の名前の由来となっています．ちなみに，一様分布は矩形（くけい）分布と呼ばれることもあります．矩形というのは長方形という意味です．

では，一様分布の標準偏差について考えましょう．ここではとっかかりを得るために，範囲「－20％～＋20％」の一様分布を，図3.1（b）のような（－20％，－15％，－10％，－5％，0％，＋5％，＋10％，＋15％，＋20％）という９個の数字が同じ確率で現れる分布に近似します．この場合の標準偏差は簡単です．①平均は0％．②平均からの差の２乗の和を400＋225＋100＋25＋25＋100＋225＋400＝1500と求めます．③これをデータ数９で割ると[†1]167.66…となりますから，標準偏差はその正の平方根，およそ12.9％となります．

これは$20/\sqrt{3}$％≈11.5％とは，そんなに離れているわけではないですが，ちょっと違う数字になりました．基本的な考え方はこれでよいのですが，もっと細かく刻んで平均を取る必要があるのです．例えば，（－20％，－19.9％，…，＋20.0％）と0.1％ずつ201個の値に区切って上の計算をすると，11.6となり，かなり11.5に近い数字になります．これをもっとずっと細かくしていくと，厳密に$20/\sqrt{3}$になるというわけなのです[†2]．

一様分布の標準偏差の計算の仕方はこれでよいとして，疑い深い方は，そもそもなぜ一様分布が出てくるのかと思ったかも知れません．今，数値としてわかっているのは「－20％～＋20％」だけです．だからと言って，一様分布のような値の現れ方はしないというのは，常識的な判断かと思います．こういう幅が与えられている場合には，幅の限界ギリギリの値を見つける可能性は，幅の真ん中の値を見つける可能性よりも，ずっと低いというのが普通でしょう．

これも不確かさが単なるお約束の積み重ねに過ぎないということの一つの表れかも知れません．不確かさのルールブックである国際文書Guide to the expression Uncertainty in Measurement（GUM；ガム）には表面上は，常識や経験というものを取り入れて，不確かさを評価すると書いてはあります．しかし，事実上，一定の幅に値が収まっているという場合には，一様分布を用いることが多いのです．

結論としては，幅だけが分かっているときの標準偏差は半幅の$\sqrt{3}$分の1．覚えてしまえば，別に難しいルールではありませんね．中学校の先生であれば「これはテストに絶対出るから覚えておいてね！」と言うところです．

さて，この節では，標準偏差を実験結果に基づかずに，手元の情報から決定しました．このような不確かさの評価を**タイプB評価**と呼びます．一方で，自分で実験し，不確かさを評価するのを**タイプA**評価と呼びます．

3·2　分布の王様は正規分布

先ほどは，一様分布を使った評価を見ましたが，測定の分野でもっともよく目にする分布は，一様分布ではありません．もっともよく目にするのは，**正規分布**と呼ばれる分布です．正規分布とは，**図3.2**（a）に示した釣り鐘（つりがね）型などとよく呼ばれる分布で，真ん中が盛り上がり，裾に行くほど小さいという特性を持っています．どうしてこの分布をよく目にするのか，ちょっとした例を通してお話しましょう．

じゃんけんで勝つか，負けるか，あいこになるかの確率がそれぞれ３分の１ずつになるというのは，ご存じでしょうか？あいこになる確率が大きいような気がするとすれば，それは大人数でのじゃんけんです．（4人でやると，半分近くはあいこになります．）ここでは２人での１回きりのじゃんけんを考えます．読者の方にはじゃんけんに自信のある方もいるかも知れませんが，「勝」，「分」，「負」がそれぞれ３分の１ずつというのは前提としましょう．

ということは，「勝」，「分」，「負」の一様な分布と言えます．しかし，ちょっとしたことで，この様相は変わってしまうのです．

例えば，2回じゃんけんをしてみましょう．どんな勝敗の組み合わせが考えられるでしょうか？例えば「２連勝」，それから，「１勝１分」，「１勝１敗」，「２分」，「１敗１分」，そして，「２連敗」です．ここで，勝ち数から負け数を引いた数をポイントとします．２連勝の場合は２－０＝＋２ポイントとなります．このポイントは，＋２ポイントから－２ポイントまでの，色々なポイントになる可能性があります．

それぞれのポイントの確率を計算してみましょう．結構大変ですので，心してかかってください．まず，＋２ポイント

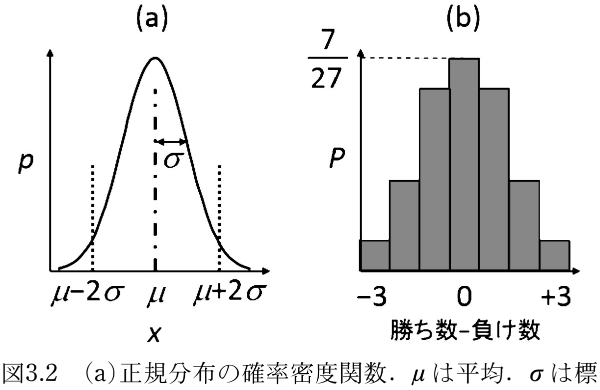

図3.2　（a）正規分布の確率密度関数．μは平均．σは標準偏差．（b）じゃんけんを３回やったときの勝ち数から負け数を引いた値の確率分布．両者はよく似ている．

†1）（データ数－1）の８ではなく，データ数９で割ったのは，ここでは本当の平均０が分かるからです．前回述べたように本当の平均が分からないときにはデータ数－１で割りますが，本当の平均が分かるときにはデータ数で割ります．

†2）細かくしてくと，最後は積分が現れます．中心が０，半幅がAの（つまり$-A$からAを範囲とする）一様分布を考えましょう．値xの中心０からのずれの２乗はx^2です．刻み幅を無限に細かくすると，x^2の平均は$\int_{-A}^{A} x^2 dx/2A$で与えられます．$-A$からAまでx^2を積分したものを，その範囲の大きさ（$2A$）で割って平均化しているのです．これを計算して，その正の平方根をとると$A/\sqrt{3}$が得られます．

は「2連勝」しかないですから，一回目に勝つ確率の1/3と二回目に勝つ確率の1/3をかけて，1/9となります．+1ポイントも「1勝1分」しかありませんが，先に勝つ場合と，先に分ける場合の2つの場合があります．つまり，2連勝の2倍起こりやすく，2/9の確率があることになります．0ポイントは，「1勝1敗」と「2分」があり，「1勝1敗」は先に勝つ場合と先に負ける場合があるので，全部で3つの場合があり，確率は3/9となります．−1ポイントは+1ポイント相手がとった場合ということですから2/9．同じく，−2ポイントは1/9です．ああ，大変でした．

何が言いたいかと言うと，この+2ポイントから−2ポイントの確率の並び(1/9, 2/9, 3/9, 2/9, 1/9)は，全く一様ではないということです．真ん中が盛り上がっていて，裾に行くほど小さい…おや，先ほどの正規分布の説明に似ているような….

ここでは，せっかくなので，もう一回じゃんけんしてみましょう．+3ポイントから−3ポイントまでどういう確率で現れるか，どうしても計算をしたいという方を止めたりはしません．しかし，ここは先を急ぎましょう．答えを図3.2(b)に示します．いかがでしょうか？もうほとんど図3.2(a)と変わらないと言っても過言では…あるかも知れませんが，だいぶん正規分布に似てきたとは言えましょう．

最初は一様であった，「勝」，「負」，「分」の確率分布が，3回繰り返すと，正規分布っぽくなるというのは，ちょっと不思議なことです．しかも，これを無限に繰返していくと，なんと，どんどんと正規分布に近づいていくことが数学的に証明されています[†1)]．

ここでは一様分布でしたが，実は，他のどんな分布であっても，それらを足していくと，正規分布に近づくということが知られています．自然物でも，人工物でも，いくつかの誤差が重なった結果として，最終的に目に見える誤差になるということを考えると，誤差の分布は正規分布に近いものになるであろうと予想されます．その予想は正しく，このために，正規分布が測定の分野でよく表れることになるのです．

それでは，正規分布が不確かさ評価において，どのように使われるかをお話しましょう．測定の分野で重要な正規分布の特性はただ一つです．それは正規分布においては，標準偏差の±2倍の範囲に，95%の値が現れるということです．

もう少し細かい話は次回にいたしますが，これは測定装置を校正したときの不確かさと関連します．測定装置を校正に出すと，校正事業者は校正結果を含む校正証明書を発行します．校正証明書には不確かさとして，標準偏差が書いていないことがあります．その代わりにしばしば，95%の信頼の水準[†2)]をもつ区間が書かれているのです．

†1) この無限にばらつく値を足しこんでいくと，その結果得られる値の分布が正規分布になるという定理を中心極限定理と呼びます．

†2) 統計学には「信頼水準」という用語がありますが，不確かさ評価ではあえて「信頼の水準」という異なる用語を使います．この言い回しにひっかかる方は，とりあえず「確率」と言い換えていただいて問題ありません．

この95%の区間から標準偏差を計算したい時，どうするかと言えば，その半幅を2で割るのです．これは，ばらつきが正規分布ならば，標準偏差の±2倍の範囲に95%の値が現れるためです．そうでないということもあるのですが，例外については次回またお話しましょう．

この節の絶対テストに出るポイントをまとめますと，正規分布で，95%という確率と幅の大きさが分かっているときには，その半幅を2で割ると標準偏差になるということです．

3·3　不確かさにだって単位がある

突然ですが，皆様にはパーティーの幹事になっていただきましょう．そのパーティーでは，食事は準備されているのですが，飲み物のビールの値段は飲んだ分だけ後払いです．もちろん，ビールの総額は，(ビール1本の値段)×(ビールの本数)ということなります．残念ながら，ビール1本の値段も，消費されるビールの本数も不確かです．幹事としては，おおよその値を定めるとともに，その不確かさも分かればうれしいところです．

ビール1本の値段については，95%の信頼の水準で260(円/本)から300(円/本)までの範囲に入るという情報があるとします．ビールの値段が正規分布するならば，ビールの値段の標準偏差は95%の範囲の半幅(20(円/本))の半分です．これは10(円/本)となります．

では，どれだけビールを飲むかというと，100本か，102本か，93本か…そんなところです．ここでは，思い切って，100本と決めてしまいましょう．ただし，±7本の幅があるものと考えます．半幅の大きさを$\sqrt{3}$で割ると，標準偏差が求まります．消費されるビール本数の標準偏差は$7/\sqrt{3}$本です．$7/\sqrt{3}=4.04\cdots$ですから，およそ4本ということになりましょう．

ビールの総額は，(ビール1本の値段)×(ビールの本数)ですから，おおよそ280(円/本)×100(本)=28000円です．さて，この不確かさはどれほどでしょうか．

ここには2つの不確かさの要因があります．一つはビール1本の値段．この標準偏差は10(円/本)です．もう一つはビールの本数です．この標準偏差も4本と分かっています．複数の不確かさの要因が分かっているときには，「2乗して足す」のでしたね．これが一番重要なルールでした．

さて，2乗して足してみましょう．10(円/本)を2乗すると，100(円/本)^2．4本を2乗すると，16(本)^2．これらを足して，116…と思った方はご用心．116の単位がどうなるかを考えてみて下さい．100の方の単位は「(円/本)の2乗」です．では，116も「(円/本)の2乗」かというと，それはおかしいですよね．足し算のする相手の16の単位は「本の2乗」なのですから….要は足せないのです．一体どういうことなのでしょうか？

実は，肝心なことを言い忘れていました．「2乗して足す」ことで不確かさを決めることが出来るのは，不確かさの要因

が単純に足し算してあるとき，あるいは引き算してあるときだけなのです．なんとも，説明不足で申し訳ありませんでした．今回は（ビールの総額）＝（ビール１本の値段）×（ビールの本数）という掛け算なので，不確かさの計算はできないのです．これは困りました．

ただ，あきらめたら，そこで試合終了です．掛け算の不確かさが計算できないのは事実です[†1]が，掛け算を足し算に近似することはできるかも知れません[†2]．

考えたいのは，例えば，ビール１本の値段が標準偏差の分10（円/本）変わったとしたら，どのくらいビールの総額が変わるかということです．ビールの本数はおおよそ100本です．ということは，１本の値段が10（円/本）変わったら，総額では10（円/本）×100本＝1000円変わるということになりますね．

具体的にビールの値段が280（円/本）の場合と290（円/本）の場合，ビールの本数を100本と固定したならば，総額が28000円と29000円となります．確かに，ビール１本の値段が10円増えると，総額は1000円変わっていますね．

同じく，ビールの本数が４本変わったら，総額は４本×280円＝1120円だけ変わるだろうということも分かっていただけますでしょうか．

これらを踏まえると，ビールの総額は，

（ビールの総額）

＝（ビール１本の大体の値段）×（ビールの大体の本数）

＋（ビール１本の値段の変化による総額の変化）

＋（ビールの本数の変化による総額の変化）

という足し算に近似できるような気がしてきます．なお，第１項の（ビール１本の大体の値段）×（ビールの大体の本数）は28000円です．

ちょっとピンと来ない方は**図3.3**もご覧ください．図3.3からも分かるように，上の式は厳密には正しくはありません．しかし，不確かさがあまり大きくないときには，これで十分な近似なのです．例えば，ビール１本の値段が290（円/本），ビールの本数が104本の時，ビールの総額は，290（円/本）×104本＝30160円です．上の近似では，（ビール１本の値段の変化による総額の変化）は1000円でした．同じく（ビールの本数の変化による総額の変化）は1120円．ビールの総額は28000円＋1000円＋1120円＝30120円となります．この40円の差には目をつむってあげて下さい．

†1）正確に言うと，掛け算の不確かさを直接に計算しようとすると，とても大変だということです．通常は，モンテカルロ法と呼ばれる数値計算により実施します．

†2）これは学会報なので，「テーラー展開して線形近似します」だけで説明としては十分でしょうが，数学が苦手な方のために遠回りな説明をしました．複雑な関数の不確かさを評価するには，テーラー展開による線形近似が必須です．

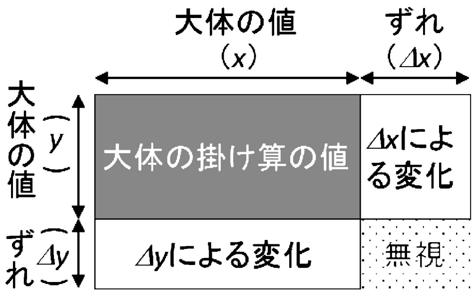

図3.3　掛け算を足し算に近似するときのイメージ図．長方形の両辺の掛け算は長方形の面積．横のずれ（$\varDelta x$）と縦の大体の値（y）を掛けると，横のずれによる変化となる．縦のずれも同じ．上で無視する面積が大きいほど近似は悪くなる．

このように，掛け算を足し算に近似できました．しかも，不確かさの要因はそれぞれ別の項に移してあります．近似式の第１項の28000円は不確かさのない値です．第２項はビール１本の値段の不確かさが考慮された項で，この標準偏差は1000円ということになります．第３項はビールの本数の不確かさが考慮された項で，標準偏差は1120円となります．

これであれば，２つの不確かさ要因の標準偏差である1000円と1120円は同じ単位なので，「２乗して足す」ことができますね．２乗して足した値の正の平方根である，およそ1500円がビールの総額の標準偏差なのです．

このように，複雑な式で測定対象量を求める場合には，その式を，不確かさ要因ごとに別の項になるように，足し算あるいは引き算の形に近似します．

このときに，もともと知っていた単位での標準偏差が，別の値に変換されます．例えば，ビール１本の値段の標準偏差10（円/本）は1000円に変換されました．この変換の割合のことを**感度係数**と呼びます．この例では1000（円）/10（円/本）＝100（本）が感度係数です．感度係数は単位を変換する係数とよく言われます．ただ，その背景に上の近似があるということも知っておいて，損はないでしょう．

今回は実験以外の情報から不確かさを導き出す方法と，単位の変換についてお話しました．次回は最終回．不確かさの使い方について，お話します．（つづく）

城野克広

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

2007年　東京大学大学院新領域創成科学研究科博士課程修了

2009年　産業技術総合研究所研究員

2013年３月・現職

専門分野：不確かさの評価の技術開発・比較試験の統計処理

◎活動内容などは下記Webサイトをご覧ください．（https://staff.aist.go.jp/k.shirono/）

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★