解説

ホール効果と異常ホール効果，そしてその先にあるもの

近藤憲治*

1. はじめに

ホール効果は Kittel の有名な固体物理の教科書[1]などに出ている効果で，大学の学部生の頃に学び，比較的良く知られている現象で，初等的だと思われている．また異常ホール効果も強磁性体のホール効果を測定すると，磁化に比例した形でホール係数が測定されるということで，多くの教科書に書かれている．しかしながら，近年ホール効果一般について理解が進み，量子ホール効果(QHE)，スピンホール効果(SHE)，そして異常ホール効果(AHE)などは固体中のブロッホ電子が感じるベリー位相と深い関係があることがわかってきた．特に，異常ホール効果は，不純物などがその効果の主原因だとする説が長い間信じられてきたが，ここに来て，ベリー位相を主原因とする intrinsic な説が再び注目されるようになってきた．そもそも Karplus と Luttinger が1954年に intrinsic な説[2]を唱えたのが始めであるが，そのころは幾何学的な位相などとは無関係に電流演算子のバンド間行列要素を考慮することにより，スピン軌道相互作用がある場合には，彼らは intrinsic な原因で異常ホール効果は起こると主張していた．しかしながら，ほどなく，Smit[3][4]と Berger[5]がこの理論を批判した．批判の根拠は，準定常状態なのだから，不純物が重要な効果を占めてなければおかしいのではないかというのが，根底にある思想である．そこで，うまれた概念が，skew 散乱と side jump というスピンに依存した散乱による異常ホール効果起源説である．この不純物散乱による extrinsic な散乱が異常ホール効果の起源であるとする説はやがて広く行き渡るようになる．今でも extrinsic な起源のみであると思っている方が多いのではないだろうか．しかしながら，近年の理論の発展と実験結果からは intrinsic な効果による異常ホール効果は確実にあると思われている．また，そのような理論の発展の中で，スピンホール効果が予言され[6]，その実験による検証[7]が行われ，ますますホール効果の持つ深い物理的な意味が重要になって来た．先に述べたように，実は量子ホール効果も同じ土壌(ベリー位相という幾何学的位相)の元で論じる事ができるのである．本解説では，私の知る限りのところで，ホール効果ならびに異常ホール効果，そしてそれらと深い関わりのあるベリー位相について解説を試みたい．

2. ホール効果の理論

(1) 普通のホール効果

普通のホール効果[8]は広く知られているが，異常ホール効果や他のホール効果について述べる前に，普通のホール効果の現象論を展開する．以後ホール効果と言えば，普通のホール効果を意味するものとする．ホール効果は，試料に垂直に磁場を掛けた場合，磁場と直交する方向に電流を流した際に，それらに直交する方向にホール電圧 V_{H} と呼ばれる電圧が発生する現象である．**図1**にホール効果測定の概念図を示す．一般に電場と電流密度の間には，式(1)の関係が成立する．

$$J_i=\sigma_{ij}(\boldsymbol{B})E_j \qquad (1)$$

ここで J_i は電流密度の i 方向成分，E_j は電場の j 方向成分，そして $\sigma_{ij}(\boldsymbol{B})$ は磁気伝導率テンソルである．式(1)で添え字が2度出てきたら和を取る Einstein の総和則を使っている．磁気伝導率は磁場の関数であり，オンサーガーの相反定理から

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{B})=-\sigma_{ji}(\boldsymbol{B}) \qquad (2)$$

が成立する，この関係は，系が時間反転対称性を持っている

* 北海道大学講師；電子科学研究所量子機能素子研究分野(〒001-0020 札幌市北区北20条西10丁目)
Introduction to Hall Effects and Anomalous Hall Effects for the Perspective of Their Effects; Kenji Kondo(Laboratory of Quantum Electronics, Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University, Sapporo)
Keywords: *Hall effects, anomalous Hall effects, Berry phase, skew scattering, side jump, spin Hall effects*
2008年10月7日受理

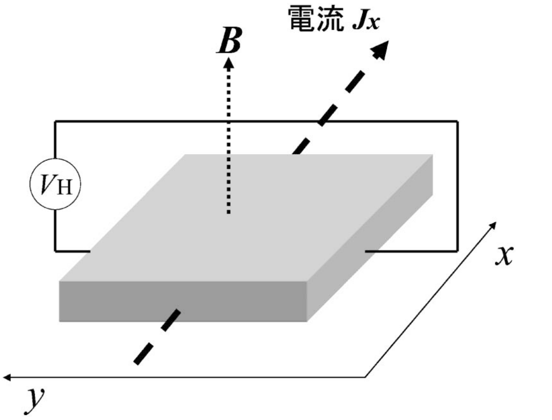

図１　ホール効果測定の概念図．

事を前提にしており，エネルギー散逸は，時間反転によって変わらない事を示している．磁場が無ければ，マイナス符号はない．なぜなら磁場は時間反転対称性を破るので，もとに戻すのにマイナスが必要なのである．式(１)を逆に解けば，

$$E_i = \rho_{ij}(\boldsymbol{B}) J_j \tag{3}$$

が成立する．ここで $\rho_{ij}(\boldsymbol{B})$ は磁気抵抗率テンソルである．

ホール効果を論じるにあたり，ここでは，エネルギーバンドは球状で，緩和時間はエネルギー依存性を持たない２バンドモデルを考える．すなわち，質量 m_e で緩和時間 τ_e の電子が n 個あり，質量 m_p で緩和時間 τ_p の正孔が p 個ある場合を考える．電子と正孔を同時に論じるため，磁場 $\boldsymbol{B}$ 中に電荷 e を持つ質量 m^* の荷電粒子を考える．磁場中の荷電粒子はローレンツ力を受け，次式の方程式に従う．

$$m^* \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + m^* \frac{\boldsymbol{v}}{\tau} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{4}$$

ここで τ は荷電粒子の緩和時間である．定常状態で，磁場が大きさ B の z 成分しか持たなかった場合，xy 平面内の荷電粒子の速度は，

$$v_x = \frac{e\tau}{m^*}\frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2}(E_x + \omega_c \tau E_y)$$

$$v_y = \frac{e\tau}{m^*}\frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2}(-\omega_c \tau E_x + E_y)$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \tag{5}$$

で与えられる．この式から，xy 平面内の電流密度 $\boldsymbol{J}$ は，

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{ne^2}{m^*}\begin{pmatrix} \dfrac{\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} & \dfrac{\omega_c\tau^2}{1+(\omega_c\tau)^2} \\ \dfrac{-\omega_c\tau^2}{1+(\omega_c\tau)^2} & \dfrac{\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる．ちなみに緩和時間がエネルギーに依存するときには，式(６)において，緩和時間を含んだ部分を重み関数で平均化した以下の式になる．

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{ne^2}{m^*}\begin{pmatrix} \left\langle \dfrac{\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} \right\rangle & \omega_c\left\langle \dfrac{\tau^2}{1+(\omega_c\tau)^2} \right\rangle \\ -\omega_c\left\langle \dfrac{\tau^2}{1+(\omega_c\tau)^2} \right\rangle & \left\langle \dfrac{\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} \right\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{7}$$

ここで，平均操作〈 〉は，f_0 をフェルミ分布関数とすると，

$$\langle\tau\rangle = \frac{\displaystyle\int \tau(E) E^{3/2} f_0 dE}{\displaystyle\int E^{3/2} f_0 dE} \tag{8}$$

で定義される．これはボルツマン方程式から導く事ができる．またエネルギーバンドが球状ではない回転楕円体の場合も，xyz 軸方向の有効質量を考慮すれば，面倒ではあるが，きちんと表式を得ることができる．式(６)に電子と正孔の質量と緩和時間を代入し，其々の符号を考慮すると，２バンドモデルの全電流密度は，

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x^e \\ J_y^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_x^h \\ J_y^h \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_e}{1+(\omega_{c1}\tau_e)^2} & \dfrac{-\omega_{c1}\tau_e\sigma_e}{1+(\omega_{c1}\tau_e)^2} \\ \dfrac{\omega_{c1}\tau_e\sigma_e}{1+(\omega_{c1}\tau_e)^2} & \dfrac{\sigma_e}{1+(\omega_{c1}\tau_e)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_h}{1+(\omega_{c2}\tau_h)^2} & \dfrac{\omega_{c2}\tau_h\sigma_h}{1+(\omega_{c2}\tau_h)^2} \\ \dfrac{-\omega_{c2}\tau_h\sigma_h}{1+(\omega_{c2}\tau_h)^2} & \dfrac{\sigma_h}{1+(\omega_{c2}\tau_h)^2} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる．ここで，電子(正孔)のサイクロトロン周波数 ω_{c1} (ω_{c2}) と電子(正孔)の導電率 σ_e (σ_h) を導入した．これを逆に解くと，磁気抵抗率テンソル $\rho_{ij}(\boldsymbol{B})$ が求まる．ホール電圧は横電場 E_y に試料の幅 d を掛けたものであるが，よく知られたホール係数 R は次式で定義される．

$$R = \frac{E_y}{J_x B} = \frac{\rho_{yx}(B)}{B} \tag{10}$$

その値は上のモデルでは，横磁気抵抗率(ホール抵抗率)が以下のようになるので，簡単な表式にはならない．

$$\rho_{yx} = \frac{-\sigma_e\omega_{c1}\tau_e(1+(\omega_{c2}\tau_h)^2) + \sigma_h\omega_{c2}\tau_h(1+(\omega_{c2}\tau_h)^2)}{(\sigma_e+\sigma_h)^2 + (\sigma_e\omega_{c2}\tau_h - \sigma_h\omega_{c1}\tau_e)^2} \tag{11}$$

そこで，弱磁場と強磁場の２通りに分けて考えてみると，弱磁場の場合は，磁場の２乗の項は効かないので，式(11)が簡単になって，ホール係数が以下のように求まり，親しみやすい形になる．

$$R = \frac{-n\mu_e^2 + p\mu_h^2}{e(n\mu_e + p\mu_h)^2} \tag{12}$$

一方，強磁場ではもっと簡単な形になり，以下の様になる．

$$R = -\frac{1}{e(n-p)} \tag{13}$$

これは球状のシングルバンドで，緩和時間がエネルギーに拠らない場合の表式と同じになっている．最後に導出はしないが，主軸の有効質量が m_1, m_2, m_3 であるような回転楕円体状のエネルギーバンドを持ち，緩和時間がエネルギーに依存する場合の伝導電子のホール係数[9]は，

$$R = -\frac{1}{ne}\frac{\langle\tau^2\rangle}{\langle\tau\rangle^2}\frac{3(m_1+m_2+m_3)}{\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3}\right)^2 m_1 m_2 m_3} \tag{14}$$

となる．この表式からわかるように，緩和時間がエネルギーに拠らないとする近似のために緩和時間の平均の２乗と緩和時間の２乗平均が同じになるため，緩和時間がエネルギーに拠らない時には，式(13)のようになっていることが判明する．このように，普通のホール効果を振り返ってみても

なかなか豊かな物理があることがわかる．次に本題の異常ホール効果に取り掛かる．

(2) 異常ホール効果

強磁性体を使って，ホール測定をすると，そのホール抵抗率(横磁気抵抗率)ρ_H は，

$$\rho_H = -\rho_{xy} = R_0 B + 4\pi R_s M \tag{15}$$

となる．ここで，M は強磁性体の自発磁化で，R_0 は普通のホール係数，そして R_s は異常ホール係数と呼ばれるものである．式(15)に示されたように強磁性体では，ホール抵抗率に磁化に比例する項が現れる．この効果を異常ホール効果(AHE)と呼ぶ．式(15)では単純に磁化 M に比例するように書いたが，最近の実験では，磁化に単調に比例もしないし，符号の変化まで起こることが発見されている．AHE を説明する主要な理論は，初期には Karplus と Luttinger が1954年に intrinsic な説を唱え，その後すぐに，Smit と Berger が不純物散乱による extrinsic な散乱が異常ホール効果の起源であるとする理論を提案している．Smit が提唱した skew 散乱機構では，横磁気抵抗は縦抵抗に比例し，Berger による side jump 機構では横磁気抵抗は縦抵抗の 2 乗に比例するのが特徴である．その後，長らくこの extrinsic な起源説が常識とされてきた．しかしながら，近年の理論・実験両面の研究によると，どうやら intrinsic な効果があることがわかってきた．

(a) Intrinsic な起源の理論[(10)–(16)]（現代的観点から）

この intrinsic な起源説を説明するのには，どうしても久保公式を避けて通るわけには行かない．（避けても話が出来ますが，余計わからなくなる．）久保公式の証明[(17)]は教科書を見て頂くとして，久保公式を以下に示す．はじめ，熱平衡にあった系に外場 $H'(t) = -F(t)\hat{A}$（ここで，$\hat{A}$は時間を陽に含まない物理演算子）が加わったときの観測対象の物理量 B の熱平衡からの変化 $\varDelta B$ は，$\hat{B}$ を対応する演算子とすると，

$$\varDelta B(t) = \frac{i}{\hbar}\int_0^\infty dt'\, F(t-t')\,\langle[\hat{B}(t'), \hat{A}]\rangle \tag{16}$$

で与えられる．ここで，$\hbar$はプランク定数を 2π で割ったもので，$\langle\cdots\rangle$は以下のような統計平均を示す．

$$\langle\hat{P}\rangle = \frac{1}{Z}\,\mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}\hat{P}) \tag{17}$$

ここで Z は分配関数で，β は逆温度である．今，電流を考えたいので，電子系に電場 $\boldsymbol{E}e^{-i\omega t}$ を掛けた時，1 個の電子に着目すると，この外場のハミルトニアン $\hat{H}'(t)$は，

$$\hat{H}'(t) = -(e\hat{\boldsymbol{x}})\cdot\boldsymbol{E}e^{-i\omega t} \tag{18}$$

となる．ここで $\hat{\boldsymbol{x}}$ は電子の座標演算子である．したがって，

$$\hat{A} = -e\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{19}$$

である．さて，この電場によって電流が流れるので，電流密度演算子 $\hat{\boldsymbol{J}}$ は，電子の速度演算子 $\hat{\boldsymbol{v}} = \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}$ を使って，

$$\hat{\boldsymbol{J}} = -e\hat{\boldsymbol{v}} \tag{20}$$

であるので，電流密度 $\boldsymbol{J}$ は，

$$\boldsymbol{J} = \frac{ie^2}{\hbar}\int_0^\infty dt'\, e^{-i\omega(t-t')}\langle[\hat{\boldsymbol{v}}(t'), \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{E}]\rangle \tag{21}$$

となる．この式から電場ベクトルを成分で書いたとき，電場 $E_j e^{-i\omega t}$ に対する応答としての伝導率テンソル $\sigma_{ij}(\omega)$は以下のように与えられる．上の式の被積分関数の t' を t に書き換えてある．

$$\sigma_{ij}(\omega) = i\frac{e^2}{\hbar}\int_0^\infty dt\, e^{i\omega t - \delta t}\langle[\hat{v}_i(t), \hat{x}_j]\rangle \tag{22}$$

ここでδは正の微少量で，因果律を満たすために挿入した．また $\hat{v}_i(t)$は外場が加わる前の系のハミルトニアンを H としたときの以下のようなハイゼンベルク表示である．

$$\hat{v}_i(t) = e^{iHt/\hbar}\hat{v}_i e^{-iHt/\hbar} \tag{23}$$

式(22)が基本式である．また以後は内外の論文で採用されている自然単位系を採用して $\hbar = c = 1$ とする．さて外場が加わる前の結晶系のハミルトニアン H の固有状態 $|n\rangle$ とそのエネルギーを ε_n とすると，上述の式は $|n\rangle$ の完全性を使って，

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\omega) &= ie^2\int_0^\infty dt\, e^{i\omega t-\delta t}\langle[\hat{v}_i(t), \hat{x}_j]\rangle \\ &= ie^2\int_0^\infty dt\, e^{i\omega t-\delta t}\sum_{mn} f(\varepsilon_m) \\ &\quad\times[\langle m|e^{iHt}\hat{v}_i e^{-iHt}|n\rangle\langle n|\hat{x}_j|m\rangle \\ &\quad-\langle m|\hat{x}_j|n\rangle\langle n|e^{iHt}\hat{v}_i e^{-iHt}|m\rangle] \\ &= ie^2\int_0^\infty dt\, e^{i\omega t-\delta t}\sum_{mn} e^{i(\varepsilon_m-\varepsilon_n)t} \\ &\quad\times[f(\varepsilon_m)\langle m|\hat{v}_i|n\rangle\langle n|\hat{x}_j|m\rangle \\ &\quad-f(\varepsilon_n)\langle n|\hat{x}_j|m\rangle\langle m|\hat{v}_i|n\rangle]\end{aligned} \tag{24}$$

と変形できる．最後の等式の第 2 項において，添え字の n と m を入れ替えた．速度と位置には次式の関係が成立するので，

$$\hat{v}_j = \dot{\hat{x}}_j = i[H, \hat{x}_j] \tag{25}$$

座標演算子の行列要素は，

$$\langle n|\hat{x}_j|m\rangle = \frac{1}{i(\varepsilon_n-\varepsilon_m)}\langle n|\hat{v}_j|m\rangle \tag{26}$$

と書きなおせる．これを用いて式(24)を書き換えて，時間に関する積分を実行すると，

$$\sigma_{ij}(\omega) = ie^2\sum_{m\neq n}\frac{f(\varepsilon_m)-f(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n-\varepsilon_m}\frac{\langle m|\hat{v}_i|n\rangle\langle n|\hat{v}_j|m\rangle}{\omega+i\delta+\varepsilon_m-\varepsilon_n} \tag{27}$$

が得られる．引用文献などで見かける式は，速度演算子に素電荷を掛けた電流密度演算子を用い，かつ固有状態に結晶のブロッホ状態を用いているので，それを使って式(27)を書き直せば，

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\omega) &= i\sum_{m\neq n}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{f(\varepsilon_m(\boldsymbol{k}))-f(\varepsilon_n(\boldsymbol{k}))}{\varepsilon_n(\boldsymbol{k})-\varepsilon_m(\boldsymbol{k})} \\ &\quad\times\frac{\langle m\boldsymbol{k}|\hat{J}_i|n\boldsymbol{k}\rangle\langle n\boldsymbol{k}|\hat{J}_j|m\boldsymbol{k}\rangle}{\omega+i\delta+\varepsilon_m(\boldsymbol{k})-\varepsilon_n(\boldsymbol{k})}\end{aligned} \tag{28}$$

となり，よく見かける式になることがわかる．直流の場合を考えると，式(28)は，無限小の δ を無視して，

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}(0) &= i\sum_n\sum_{\boldsymbol{k}} f(\varepsilon_n(\boldsymbol{k})) \\ &\quad\times\sum_{m\neq n}\frac{\langle n\boldsymbol{k}|\hat{J}_y|m\boldsymbol{k}\rangle\langle m\boldsymbol{k}|\hat{J}_x|n\boldsymbol{k}\rangle-\langle n\boldsymbol{k}|\hat{J}_x|m\boldsymbol{k}\rangle\langle m\boldsymbol{k}|\hat{J}_y|n\boldsymbol{k}\rangle}{[\varepsilon_n(\boldsymbol{k})-\varepsilon_m(\boldsymbol{k})]^2}\end{aligned} \tag{29}$$

となる．ここで，関心のある横伝導率のみを強調するために ij の添え字を xy に固定した．これが直流伝導率の一般式である．

この式からベリー位相に結びつけるには，もう少し変形が必要で，一般化されたファインマンの定理を用いて変形する．一般化されたファインマンの定理とは，パラメータ k に依存するハミルトニアン $H(x;k)$ があり，その n 番目の規格直交化された波動関数と対応する固有値がそれぞれ $\psi_n(x;k)$ と $\varepsilon_n(k)$ のとき，

$$\left\langle \psi_m(x;k) \left| \frac{\partial H(x;k)}{\partial k} \right| \psi_n(x;k) \right\rangle$$

$$= (\varepsilon_n(k) - \varepsilon_m(k)) \left\langle \psi_m(x;k) \left| \frac{\partial \psi_n(x;k)}{\partial k} \right.\right\rangle$$

$$= -(\varepsilon_n(k) - \varepsilon_m(k)) \left\langle \frac{\partial \psi_m(x;k)}{\partial k} \right| \left. \psi_n(x;k) \right\rangle \tag{30}$$

が成立することを主張する定理である．式(29)において，波数ベクトルをパラメータと見なすことができるので，式(30)から電流密度演算子の行列要素は以下のように，波数ベクトルの微分で置き換えることができる．

$$\langle m\boldsymbol{k}|\hat{J}_\mu|n\boldsymbol{k}\rangle = -e(\varepsilon_n(\boldsymbol{k}) - \varepsilon_m(\boldsymbol{k}))\langle m\boldsymbol{k}\left|\frac{\partial}{\partial k_\mu}\right|n\boldsymbol{k}\rangle \tag{31}$$

ここで電流密度演算子は速度演算子に $-e$ を掛けたものなので，$-e$ が現れている．これを式(29)に代入して，n バンドのブロッホ波動関数を u_n^k とすると，

$$\sigma_{xy}(0) = -ie^2 \sum_n \sum_{\boldsymbol{k}} f(\varepsilon_n(\boldsymbol{k}))$$
$$\times \left[\left\langle \frac{\partial u_n^k}{\partial k_x} \middle| \frac{\partial u_n^k}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u_n^k}{\partial k_y} \middle| \frac{\partial u_n^k}{\partial k_x} \right\rangle \right] \tag{32}$$

が得られる．

従って，今，以下の様なベクトルポテンシャルを定義すると，

$$\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{k}) = -i\langle n\boldsymbol{k}|\nabla_k|n\boldsymbol{k}\rangle \tag{33}$$

式(32)は非常に簡単な次式になる．

$$\sigma_{xy}(0) = e^2 \sum_n \sum_{\boldsymbol{k}} f(\varepsilon_n(\boldsymbol{k}))\, b_{nz}(\boldsymbol{k}) \tag{34}$$

ここで，

$$b_{nz}(\boldsymbol{k}) = [\nabla_k \times \boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{k})]_z \tag{35}$$

であり，これは式(33)のベクトルポテンシャルの回転なので，仮想的な磁場と見なせる．但し，本当の磁場があるのではないことに注意して欲しい．磁場のように見えるだけである．この式(34)の波数の和を積分に書き換えたときの波数空間での次式の積分がベリー位相に他ならない．また式(35)をベリー曲率と呼ぶ．

$$\int_S b_{nz}(\boldsymbol{k})\, dk_x dk_y$$
$$= \int_S \boldsymbol{b}_n \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S (\nabla_k \times \boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{k})) \cdot d\boldsymbol{S}$$
$$= \oint \boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{k}) \cdot d\boldsymbol{k} = \oint -i\langle n\boldsymbol{k}|\nabla_k|n\boldsymbol{k}\rangle \cdot d\boldsymbol{k} \tag{36}$$

式(36)において3番目の等式にストークスの定理を用いた．この最後の式の被積分関数が，ブロッホ波動関数がパラメータ空間で $d\boldsymbol{k}$ だけ動いたときの無限小の位相差になっている．なぜなら，ブロッホ波動関数は以下のようなゲージの任意性を持っている．

$$\tilde{u}_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k}) = e^{i\theta_n(\boldsymbol{k})} u_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k}) \tag{37}$$

これは普通に，波動関数がもつ位相の任意性と似ているが，少し違う．波数空間の各点各点で位相を任意に変えても固有値方程式が成立することを意味しているからだ．ゲージ場とは，この局所的な任意の変換を調整して全体の整合性をとる場であるともいえる．この波動関数が図2のように波数空間の閉曲線Cに沿って $\boldsymbol{k}$ から $\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{k}$ だけずれたときの波動関数同士の位相差は，それらの内積をとって偏角(Arg)を取ったものになるので以下のようになる．

$$d\phi = \mathrm{Arg}[\langle u_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k})|u_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{k})\rangle]$$
$$= \mathrm{Arg}[1 + \langle u_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k})|\nabla_{\boldsymbol{k}}|u_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k})\rangle \cdot d\boldsymbol{k}]$$
$$= -i\langle u_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k})|\nabla_{\boldsymbol{k}}|u_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k})\rangle \cdot d\boldsymbol{k} \tag{38}$$

2番目の等式において，$d\boldsymbol{k}$ についてテイラー展開を行い，1次の微小量まで取った．最後の式は式(36)の最終式の被積分関数であることがわかるであろう．従って式(36)は，閉曲線Cに沿ってブロッホ波動関数が移動したときに獲得する全位相になることがわかる．そしてこれがベリー位相である．式(38)はゲージに依存するが，それを1周積分したベリー位相はゲージ不変なのであり，そのため位相不変量になり得るのである．最近の研究において，スピン軌道相互作用によって自発磁化が存在する場合にベリー位相がゼロにならないことをOnoda[10]らは簡単な2次元正方格子モデルにおいて示したのである．さらに彼らは，ホール伝導率が磁化に単調に比例しないこと，正負の両符号を取りうることなどを示し，ホール伝導率に寄与するのは，バンドが交差しているところで，磁気単極子と同じ構造のベクトル場ができるからだと主張している．これは式(29)を見ればわかるようにほとんど縮退している場所では，分母がとても小さくなるからである．また同時期に，Jungwirth[11]らも(Ⅲ，Mn)Ⅴ族化合物半導体，いわゆる希薄磁性半導体を例にして，ベリー位相とAHEを結びつける同様な議論をしている．彼らもホール伝導率が正負の両符号を取りうることやスピン軌道相互作用が大きければ，ホール伝導率も大きいことなどを示している．彼らの計算によるホール伝導率の大きさは-1.8×10^3～$7\times10^3\,(\Omega\mathrm{m})^{-1}$であり，実験的[18][19]には$-1\times10^4$～$4\times10^4\,(\Omega\mathrm{m})^{-1}$ぐらいのようである．ここでintrinsicなAHEが発現する様子を見るのに，Bruno[16]らに習って式(36)が消えない様子を見てみる．スピン軌道相互作用にRashba型を取り入れた2次元電子ガスを考える．2次元電子ガスは z 軸方向に一様に大きさ M_0 に磁化しているとすると，この系は以下のハミルトニアンで記述できる．

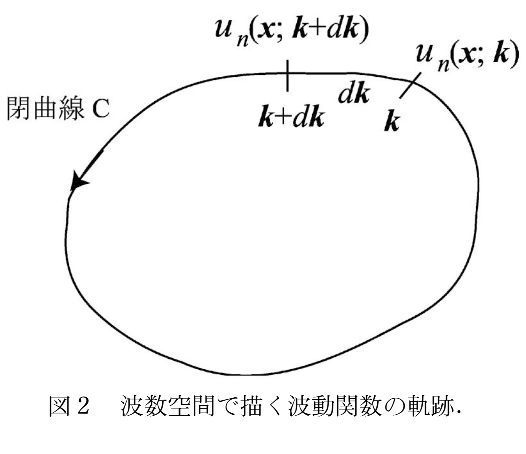

図2　波数空間で描く波動関数の軌跡．

$$H=\varepsilon_{\boldsymbol{k}}+\alpha(\sigma_x k_y-\sigma_y k_x)-M\sigma_z \tag{39}$$

ここで，

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}}=\frac{\hbar^2\boldsymbol{k}^2}{2m},\quad M=g\mu_B M_0 \tag{40}$$

であり，αはスピン軌道相互作用の結合定数，gはランデのg因子，そして$\boldsymbol{\mu_B}$はボーア磁子，そして$\boldsymbol{\sigma_x}, \boldsymbol{\sigma_y}, \boldsymbol{\sigma_z}$はパウリ行列である．式(39)は以下のように行列で書けるので，この行列を対角化すれば，固有値と固有ベクトルが求まる．

$$H=\begin{bmatrix}\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-M & \alpha(ik_x+k_y)\\ \alpha(-ik_x+k_y) & \varepsilon_{\boldsymbol{k}}+M\end{bmatrix} \tag{41}$$

このハミルトニアンの固有値は，

$$\begin{aligned}E_{\boldsymbol{k}}^{\pm}&=\varepsilon_{\boldsymbol{k}}\mp\sqrt{M^2+\alpha^2k^2}\\&=\varepsilon_{\boldsymbol{k}}\mp\lambda(k)\end{aligned} \tag{42}$$

となる(複合同順)．この固有エネルギーに適当な値を入れてプロットしたのが図3である．Rashba型のスピン軌道相互作用では，放物線型のエネルギー分散が左右に横ずれしたように見えるのだが，磁化M_0があるために，上下に$2M$だけずれている．この固有エネルギーに対応する固有関数は，

$$|\pm,\boldsymbol{k}\rangle=\sqrt{\frac{\lambda\pm M}{2\lambda}}\left(1,\frac{i\alpha(k_x+ik_y)}{M\pm\lambda}\right) \tag{43}$$

と求まる．これを式(33)に代入してベクトルポテンシャルを求めると(この計算は結構大変)，

$$\boldsymbol{A}_{\pm}(\boldsymbol{k})=\left(\frac{-k_y\alpha^2}{2\lambda(\lambda\pm M)},\frac{k_x\alpha^2}{2\lambda(\lambda\pm M)}\right) \tag{44}$$

となる．この表式から判断できるように，このベクトルは回転を持っており，原点でピークを持つ．実際，式(44)のベクトルの回転を取ると，

$$b_{\pm z}(\boldsymbol{k})=\pm\frac{\alpha^2M}{2\lambda^3} \tag{45}$$

が得られる．この式から磁化が無ければ，式(45)はゼロになることが明らかである．したがって，ケミカルポテンシャルμが図3のように両方のバンドに跨っている場合は，式(34)に代入して，

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}(0)&=e^2\sum_n\sum_{\boldsymbol{k}}f(\varepsilon_n(\boldsymbol{k}))b_{nz}(\boldsymbol{k})\\&=e^2\int\frac{d^2\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\left[f(E_{\boldsymbol{k}}^{+})-f(E_{\boldsymbol{k}}^{-})\right]\frac{\alpha^2M}{2\lambda^3}\end{aligned}$$

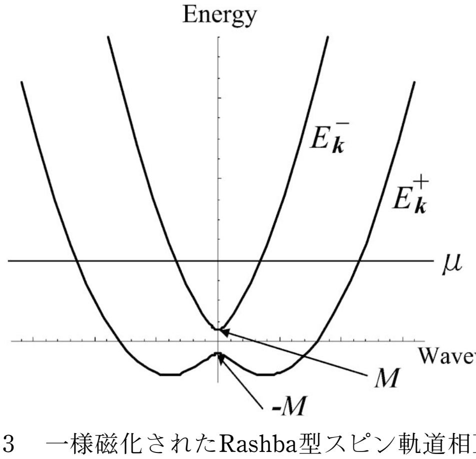

図3　一様磁化されたRashba型スピン軌道相互作用をもつ2次元電子ガスのエネルギー分散．

$$=-4e^2M\alpha^2\int\frac{d^2\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\frac{f(E_{\boldsymbol{k}}^{+})-f(E_{\boldsymbol{k}}^{-})}{(E_{\boldsymbol{k}}^{+}-E_{\boldsymbol{k}}^{-})^3} \tag{46}$$

が得られる．この簡単なモデルでも±のバンドが近接している波数空間の原点で仮想磁束がピークを持つので，バンドが交差しているところやほとんど縮退しているところが重要なことを示している．実際，磁化の大きさを大きくすると，途端に式(45)は小さくなる．これは±のバンドが離れるからである．ここに示したのが，intrinsicな異常ホール効果の発現のメカニズムである．

(b)　Extrinsicな起源の理論(skew散乱とside jump)

skew散乱とside jumpのメカニズムをきちんとやるには，散乱理論を駆使しないといけない．しかしながら，紙数の都合と内因性(intrinsic)の寄与を説明することが主眼なので，外因性(extrinsic)の寄与は，細かい導出はしないで，結果を述べていくことにする．intrinsicな寄与には散乱の原因である不純物ポテンシャルは全く入っていない．このことがKarplusとLuttingerが初めてintrinsicな起源を唱えたときに，奇妙に思われた原因である．なぜなら，散乱がないということは無散逸で流れる電流を主張しているからである．そのためには不純物散乱を入れて，その存在を主張しないといけないし，やっぱり準定常状態なのに電子の加速をとめるメカニズムがないのはおかしいというのが，ナイーブな感想だったのだと思う．そこで，SmitとBergerが提出した理論が，不純物によって，スピン量子数の異なる電子が異なる仕方で散乱されるskew散乱とside jumpの機構である．図4(a)，(b)に，それぞれこれらの機構の概念図を示す．磁化はz軸方向を向いているとしている．skew散乱において，電子はそのスピン方向によって，逆方向に散乱を受ける．考慮すべきは不純物ポテンシャルVと遍歴電子のスピン軌道相互作用で，普通に以下の式のスピン軌道相互作用を導入して計算すると，(ここで$\boldsymbol{\sigma}$はパウリ行列ベクトルで，$\boldsymbol{p}$は電子の運動量である．)

$$H_{\mathrm{SO}}=\frac{\hbar}{4m^2c^2}(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla V)\cdot\boldsymbol{p} \tag{47}$$

skew散乱による散乱角はおおよそ10^{-6} rad程度になってしまう．なぜなら式(47)の分母のうちの$2mc^2$(1 MeV)は，電子と陽電子の質量ギャップに由来するため，極めて大きく，それが値を小さくさせるからである．しかしながらSmit[4]，Blount[20]やFivaz[21]が示したように結晶中のブロッホ電子を考えると，この値がバンド効果によって，おおよそ10^4倍になるので，skew散乱による散乱角はおおよそ10^{-2} rad程度となり，実験値に近くなる．一方，side jumpは，電子のスピン方向によって，進行方向に対して，横方向に反対向きにジャンプする現象である．もちろん瞬間的に起こるのではなく，十分時間が経ったときに，そのように見えると言うことである．side jumpは不純物ポテンシャルの強さや半径などに影響されないため，きれいに書けて式(47)のスピン軌道相互作用を使うと，ジャンプ量δはLippmann–Schwinger方程式を1次ボルン近似で解くと，

$$\delta^s=\frac{\lambda^2}{4\hbar}(\boldsymbol{\sigma}_{ss}\times\boldsymbol{p})$$

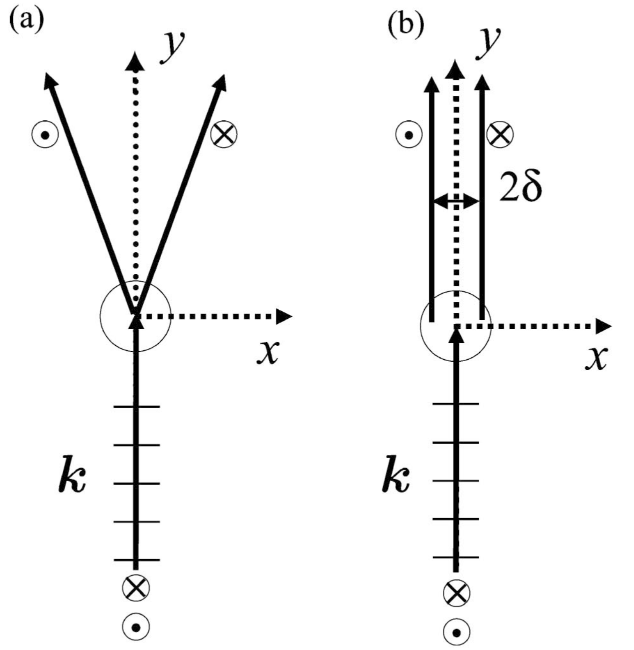

図 4　(a) skew 散乱概念図，(b) side jump 概念図．⊗は down スピンを示し，⊙は up スピンを示す．

$$\lambda=\sqrt{\alpha}\,\frac{\hbar}{mc} \tag{48}$$

が得られる．ここで，添え字 s は up スピンか down スピンかを示す指標であり，α はバンド効果による増大係数である．この δ をフェルミ波数をもった平面波で計算すると約 10^{-11} m のオーダーとなる．extrinsic な機構はスピンの up と down によって散乱される方向が違うので，強磁性体中に電流を流せば，その電流はスピン分極しているので，電荷の蓄積が一方に多く偏るであろう．さらにスピンの分離も起こっていることもわかる．これが最近，実験的にも理論的にも発見されたスピンホール効果の extrinsic な原因である．最近ではこの extrinsic な異常ホール効果と intrinsic な異常ホール効果のクロスオーバーも観察されており，両者を統一的に解釈する試みも始まっている[22]．

3．ま　と　め

普通のホール効果と異常ホール効果について記述し，特に内因性の異常ホール効果を丁寧に説明した．これはかなり判りやすくしたつもりである．しかし，その結果，外因性の異常ホール効果の説明が天下り的になってしまったのは否めない．さらに異常ホール効果とスピンホール効果はとても密接な現象なのであるが，簡単にしか触れることが出来なかった．その辺を含めて機会があれば説明したいと考えているが，今回は各自，文献を見て頂きたい．

今回の解説は東北大学多元物質科学研究所の北上修先生のお勧めで執筆したものであり，この機会を与えてくださった北上修先生に深く感謝致します．また日々の研究を一緒に行っている石橋氏，海住氏にも感謝致します．

文　　献

(1) C. Kittel: Introduction to Solid State Physics, Wiley, (2005).
(2) R. Karplus and J. M. Luttinger: Phys. Rev., **95**(1954), 1154–1160.
(3) J. Smit: Physica, **21**(1955), 877–887.
(4) J. Smit: Physica, **24**(1958), 39–51.
(5) L. Berger: Phys. Rev. B, **2**(1970), 4559–4566.
(6) S. Murakami, N. Nagaosa and S. C. Zhang: Science, **301**(2003), 1348–1351; J. Sinova, D. Culcer, Q. Niu, N. A. Sinitsyn, T. Jungwirth and A. H. MacDonald: Phys. Rev. Lett., **92**(2004), 126603-1–126603-4.
(7) Y. K. Kato, R.C. Myers, A. C. Gossard and D. D. Awschalom: Science, **306**(2004), 1910–1913.
(8) C. M. Hurd: The hall effect in metals and alloys, Plenum Press, (1972).
(9) R. A. Smith: Semiconductors, Cambridge Press, (1968).
(10) M. Onoda and N. Nagaosa: J. Phys. Soc. Jpn., **71**(2002), 19–22.
(11) T. Jungwirth, Q. Niu and A. H. MacDonald: Phys. Rev. Lett., **88**(2002), 207208-1–207208-4.
(12) Y. Yao, L. Kleinman, A. H. MacDonald, J. Sinova, T. Jungwirth, D.–S.Wang, E. Wang and Q. Niu: Phys. Rev. Lett., **92**(2004), 037204-1–037204-4.
(13) D. Culcer, A. H. MacDonald and Q. Niu, Phys. Rev. B, **68**(2003), 045327-1–045327-9.
(14) T. Jungwirth, J. Sinova, K. Y. Wang, K.W. Edmonds, R. P. Campion, B. L. Gallagher, C. T. Foxon, Q. Niu and A. H. MacDonald: Appl. Phys. Lett., **83**(2003), 320–322.
(15) A. Crepieux and P. Bruno: Phys. Rev. B, **64**(2001), 014416-1–014416-16.
(16) V. K. Dugaev, P. Bruno, M. Taillefumier, B. Canals and C. Lacroix: Phys. Rev. B, **71**(2005), 224423-1–224423-8.
(17) 高田康民：多体問題，朝倉書店，(1999).
(18) W.–L. Lee, S. Watauchi, V. L. Miller, R. J. Cava and N. P. Ong: Science, **303**(2004), 1647–1649; M. Izumi, K. Nakazawa, Y. Bando, Y. Yoneda and H. Terauchi: J. Phys. Soc. Jpn., **66**(1997), 3893–3900; Y. Taguchi and Y. Tokura: Europhys. Lett., **54**(2001), 401–406.
(19) R. C. O'Handley: Phys. Rev. B, **18**(1978), 2577–2582.
(20) E. N. Adams and E. I. Blount: J. Phys. Chem. Solids, **10**(1959), 286–303.
(21) R. C. Fivaz: Phys. Rev., **183**(1969), 586–594.
(22) T. Miyasato, N. Abe, T. Fujii, A. Asamitsu, S. Onoda, Y. Onose, N. Nagaosa and Y. Tokura: Phys. Rev. Lett, **99**(2007), 086602-1–086602-4.

近藤憲治

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★
1990年　早稲田大学大学院理工学研究科修士課程修了
1990年　ソニー株式会社　入社　中央研究所　配属
2001年　ソニー株式会社　退職
2003年　東京大学理学研究科物理学専攻博士課程中退
2003年　北海道大学電子科学研究所　講師
専門分野：物性理論(電子構造ならびに輸送理論)，半導体デバイス物理
ソニーにおいてはⅡ–Ⅵ族半導体レーザ，266 nm の固体レーザの研究，ならびに光ピックアップの研究に従事．現在は，スピン伝導デバイスの理論ならびに磁性の理論を研究している．
★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★