

# 脆性材料のモード I-II 混合モード破壊の クライテリオン

淡路 英夫 加藤 稔也<sup>†</sup>

名古屋工業大学工学部材料工学科

J. Japan Inst. Metals, Vol. 62, No. 8 (1998), pp. 735-741

## Mode I-II Combined Mode Fracture Criterion for Brittle Materials

Hideo Awaji and Toshiya Kato<sup>†</sup>

Department of Materials Science & Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology,  
Nagoya 466-8555

The Griffith energy criterion for brittle fracture is extended to mode II and combined mode I-II fracture by postulating that crack extension occurs when the maximum energy release rate in non-coplanar crack extension is equal to the fracture energy rate required for the mode II or the combined mode crack extension. The fracture energy rate is considered to be proportional to the critical magnitude of the area of a frontal process zone at a crack tip for brittle materials. The area of the frontal process zone is simply assessed here from the area enclosed in the iso-stress contours of both the maximum principal stress and the maximum shear stress around a crack tip. The anticipated ratio of mode II and mode I fracture toughness,  $K_{IIc}/K_{Ic}$ , is 1.20. The value of the ratio,  $K_{IIc}/K_{Ic}$ , is also estimated experimentally for float glass using a disk test. The result shows that the value of  $K_{IIc}/K_{Ic}$  is 1.28 which agrees quite well with the anticipated one.

(Received February 23, 1998; In Final Form May 6, 1998)

**Keywords:** Griffith criterion, maximum energy release rate, combined mode fracture, mode II fracture toughness, soda-lime glass, disk test

## I. 緒 言

固体は静的負荷のもとで垂直応力とせん断応力に抗しうることから、多軸応力下の固体中の亀裂先端には垂直応力とせん断応力による応力集中が生じ、材料の亀裂伝播に対する抵抗を表す値として、モード I、モード II、モード III 破壊靱性が定義される。これらの破壊靱性は亀裂が少なくとも脆性的に伝播する限り材料物性として扱うのが普通である。しかしながら、モード I 破壊靱性が材料物性値として破壊強度特性の中で重要な地位を占めているのに反して、モード II、モード III 破壊靱性についてはそれらが物性値であるかどうか不明らかにされているとは言い難い。

ここで、本論文における議論の対象を明確にしておく。金属結合を有する材料と、セラミックスのようなイオン結合・共有結合よりなる脆性材料では、亀裂先端の損傷域の形成機構は本質的に異なる。そこで、ここではセラミックス等の無機材料における亀裂伝播について考え、亀裂先端に形成される損傷域は十分に小さい場合を対象とする。また、脆性材料

のモード II 破壊靱性は材料物性であるべきであるという前提のもとに、モード I およびモード II 負荷による脆性亀裂伝播問題を考え、モード I 破壊靱性とモード II 破壊靱性の関係を理論的に推測することを試みる。

混合モード破壊に関する研究には、亀裂伝播開始条件を記述するクライテリオンを追求する理論的アプローチと、実験によりそのクライテリオンを導出する実験的アプローチとがある。理論的クライテリオンとしては、最大円周応力説<sup>(1)</sup>、ひずみエネルギー密度説<sup>(2)</sup>、最大エネルギー解放率説<sup>(3)</sup>がある。これらのうち、最大円周応力説は、亀裂先端における円周応力の最大値が臨界値に達すると亀裂伝播を生じるというものである。また、ひずみエネルギー密度説は、亀裂先端近傍のひずみエネルギー密度の最小となる方向にその値が臨界値に達すると破壊するというものである。しかし、これらの説は亀裂先端まで線形弾性応力分布を仮定するところに問題がある。一方、最大エネルギー解放率説は、亀裂が進展するときに解放されるひずみエネルギーが最大となる方向に進展するというものである。亀裂が脆性的に進展する場合、モード I 負荷をうける亀裂は直進することからその最大エネルギー解放率の評価は容易であるが、モード II または混合モード状態では亀裂は亀裂面外に折れ曲がって伝播するため、屈折亀裂のエネルギー

<sup>†</sup> 名古屋工業大学大学院生 (Graduate Student, Nagoya Institute of Technology)

解放率の解析が必要となる。この屈折亀裂に関する解析は多くの研究者によりなされており、現在までに種々の最大エネルギー解放率説が提案されている<sup>(3)-(6)</sup>。

最大エネルギー解放率の考えは、グリフィスのエネルギー平衡論において破壊エネルギーが負荷モードによらず一定となるとするならば、エネルギー平衡論に沿った考えといえる。しかし、後に示すように、亀裂進展に必要な破壊エネルギーはモード I とモード II で異なるとすると、単に解放されるひずみエネルギー値の比較によって破壊クライテリオンを構築することはできないことになる。従来の最大エネルギー解放率説に関する研究はすべて、破壊エネルギーは負荷モードに依らないということをも前提としてなされており、その結果、予測されるモード II とモード I 破壊靱性の比  $K_{IIc}/K_{IC}$  はほぼ 0.82 となることが示されている<sup>(3)-(6)</sup>。しかし、著者らが別に報告しているように<sup>(16)</sup>、脆性材料において  $K_{IIc}$  は  $K_{IC}$  より大きくなるはずであり、このことから、破壊エネルギーが負荷モードによらず一定と考える従来の最大エネルギー解放率説には問題があるといえる。

混合モード破壊の実験的研究についても多くの報告がある。最大円周応力説を提案した Erdogan と Sih は PMMA を用いて各種モードの実験を行った<sup>(1)</sup>。また、筆者らは円板試験法を開発し<sup>(7)</sup>、黒鉛、岩石等の  $K_{IIc}/K_{IC}$  を求め、その値が材料の差異によらず 1.05 から 1.29 となることを示した<sup>(8)(9)</sup>。一方、Shetty らは円板試験法<sup>(10)(11)</sup>、ヌーブ圧痕亀裂をつけた円板を圧縮する方法<sup>(12)</sup> などから  $K_{IIc}/K_{IC}$  は 0.82 から 2 の間で大きく変化するとし、 $K_{IIc}$  は材料物性ではないとした<sup>(13)</sup>。しかし、貫通亀裂を用いた円板試験法に関しては、研究者が異なっても極めて類似した結果となることが示されている<sup>(11)</sup>。その他の試験法としては非対称 4 点曲げ試験法<sup>(14)(15)</sup> がもっとも広く用いられているが、報告されている  $K_{IIc}/K_{IC}$  値は様々である。

ここでは、亀裂進展に要する破壊エネルギーが負荷モードによらないことを前提とする従来の最大エネルギー解放率説の考えには従わず、負荷モードにより異なった値をとりうるものと考えて<sup>(16)</sup>、混合モード破壊に関する最大エネルギー解放率説をグリフィスのエネルギー平衡論に基づいて構築することを試みる。また、その理論に基づき  $K_{IIc}/K_{IC}$  値を予測し、かつ、混合モード破壊のクライテリオンを求める。さらに、円板試験法によりソーダ石灰ガラスのモード I、モード II、およびそれらの混合モード破壊靱性試験を行い、その結果を予測された  $K_{IIc}/K_{IC}$  値、および、混合モード破壊クライテリオンと比較する。

## II. 混合モード破壊のグリフィス理論

### 1. エネルギー解放率

モード I-II 混合モード負荷のもとでの亀裂進展は、材料が脆性的である限り、Fig. 1 のように亀裂面外に折れ曲がって伝播する。したがって、混合モード破壊のクライテリ

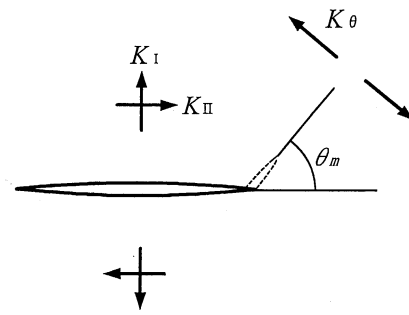


Fig. 1 Mode I-II combined mode loading and a combined mode stress intensity factor.

オンをエネルギー解放率により表すためには、この屈折亀裂のエネルギー解放率を解析する必要がある。屈折亀裂のエネルギー解放率の解析は、Hussain ら<sup>(3)</sup>をはじめ、多くの研究者によりなされているが、影山・岡村による微小屈折亀裂についての解析<sup>(6)</sup>は、過去になされた他の研究者の結果と比較されて論じられており、最も信頼性の高い研究と見なされている<sup>(5)</sup>。

影山・岡村の解析結果は次のようである。微小屈折亀裂がもとの亀裂面に対して任意の方向  $\theta$  に進展するときのエネルギー解放率を  $G$  とすると、

$$G = \frac{1}{E'} \{ h_1(\theta) K_I^2 + 2h_{12}(\theta) K_I K_{II} + h_2(\theta) K_{II}^2 \} \quad (1)$$

$$E' = \begin{cases} E(\text{平面応力}) \\ E/(1-\nu^2) (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$$

と表される。ここに、 $K_I$  : モード I 応力拡大係数、 $K_{II}$  : モード II 応力拡大係数、 $E$  : ヤング率、 $\nu$  : ポアソン比である。また、係数  $h_1, h_{12}, h_2$  は次のような近似式で表されている。

$$h_1 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) (1 - 0.003\xi^2 + 0.041\xi^4)$$

$$h_{12} = -\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta (1 - 0.003\xi^2 + 0.027\xi^4)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} (5 - 3 \cos \theta) \{ 1 + \sin^2 \theta (0.168 + 0.02 \cos 3\theta) \}$$

$$\xi = \theta/90 (\text{degree}), 2\theta/\pi (\text{radian}) \quad (2)$$

一方、市川は以上の結果から、エネルギー解放率が最大となる方向へ微小屈折亀裂が伝播するときの最大エネルギー解放率  $G_{\max}$  の近似式を次のように表した<sup>(5)</sup>。

$$G_{\max} = \frac{1}{2E'} (K_I^2 + 3K_{II}^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 6K_{II}^2}) \quad (3)$$

この近似式の誤差は最大で 1.4% であり、純モード II で最大誤差を生じる。そこで、より精度の高い近似式を市川の方法に倣って求めると、次のようになる。

$$G_{\max} = \frac{1}{2E'} (K_I^2 + \alpha K_{II}^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 2\alpha K_{II}^2}) \quad (4)$$

$$\alpha = 3.042$$

この近似式の誤差は最大 0.54% であり、かつ、純モード I、純モード II においては影山・岡村の解に一致する。

次に、亀裂が直進するときのエネルギー解放率は、式(1)、

(2)より,

$$G_0 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (5)$$

と表されるので, これを用いて, 無次元最大エネルギー解放率を次のように定義する.

$$G_{\max}^* = \frac{G_{\max}}{G_0} \quad (6)$$

また, 単位面積あたりの破壊エネルギー  $\gamma$  の無次元化も同じく次のように定義する.

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{G_0} \quad (7)$$

モード I-II 混合モード負荷をうけるときの亀裂先端近傍の応力は, モード I とモード II 応力拡大係数を用いて表されるが, ここでは混合モード破壊のクライテリオンを導く都合上, 亀裂先端近傍の円周応力  $\sigma_\theta$  に関する次のような混合モード応力拡大係数を定義する<sup>(7)</sup>.

$$K_\theta = \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta = \cos \frac{\theta}{2} (K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta) \quad (8)$$

また, その無次元応力拡大係数を次のように定義する.

$$K_\theta^* = \frac{K_\theta}{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}} \quad (9)$$

さらに, モード I 負荷のみをうけるときの最大エネルギー解放率は, 式(4)より,

$$G_{\max} = \frac{K_I^2}{E'} \quad (10)$$

と表されることから類推して, 混合モード負荷のもとでの最大エネルギー解放率を,

$$G_{\max} = \frac{f(\theta_m) K_{\theta_m}^2}{E'} \quad (11)$$

または無次元化して,

$$G_{\max}^* = f(\theta_m) K_{\theta_m}^{*2} \quad (12)$$

と表されるとする. ここに,  $\theta_m$  はエネルギー解放率の最大となる方向,  $K_{\theta_m}$  は  $\theta_m$  方向の混合モード応力拡大係数,  $K_{\theta_m}^*$  は  $K_{\theta_m}$  の無次元値,  $f(\theta_m)$  は  $\theta_m$  により決まる定数である. 任意のモード I-II 混合モード負荷状態におけるエネルギー解放率の最大値  $G_{\max}^*$  およびその方向  $\theta_m$  を式(1), (2)より求め,  $\theta_m$  方向における  $K_{\theta_m}^*$ ,  $f(\theta_m)$  を式(8), (12)より計算する. そして,  $\beta = K_{II}/K_I$  とおいて,  $\cot^{-1} \beta$  と  $\theta_m$ ,  $G_{\max}^*$ ,  $K_{\theta_m}^*$ ,  $f(\theta_m)$  の関係を示すと **Fig. 2** のようになる. また,  $G_{\max}^*$  と  $f(\theta_m)$  の純モード I, II における値は次のようになる.

純モード I のとき:  $G_{\max}^* = 1, f(\theta_m) = 1, K_{\theta_m}^* = 1$

純モード II のとき:  $G_{\max}^* = 1.52, f(\theta_m) = 1.15, K_{\theta_m}^* = 1.15$

## 2. エネルギー平衡

脆性破壊についてのグリフィスのエネルギー平衡論では, 亀裂先端におけるエネルギー解放率  $G = dU/da$  ( $U$ : 弾性ひずみエネルギー,  $a$ : 亀裂長さ) が亀裂成長に必要な破壊エネルギー  $R = dW/da$  ( $W$ : 破壊エネルギー) に等しくなるときに亀裂

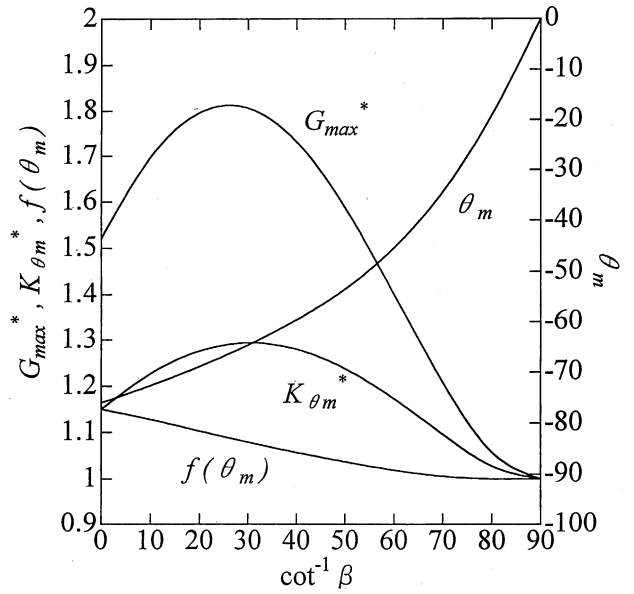


Fig. 2 Relations between the maximum energy release rate,  $G_{\max}^*$ , the direction of the maximum energy release rate,  $\theta_m$ , the combined mode stress intensity factor,  $K_{\theta_m}^*$ , and the factor,  $f(\theta)$ .

は進展すると考える<sup>(17)</sup>. したがって, モード I 亀裂進展における単位面積あたりの破壊エネルギーを  $\gamma_I$  とすると, モード I 亀裂進展のときの破壊エネルギー率は  $R = 2\gamma_I$  となるので, 純モード I 亀裂進展に対するエネルギー平衡は式(10)より次のように表される.

$$\frac{K_{IC}^2}{E'} = 2\gamma_I \quad (13)$$

また, モード II 亀裂進展における単位面積あたりの破壊エネルギーを  $\gamma_{II}$ , 混合モード応力拡大係数の臨界値を  $K_{\theta C}$  とすると, 純モード II のエネルギー平衡は式(8)と(11)より,

$$\frac{f(\theta_m) K_{\theta C}^2}{E'} = \frac{1.15 \times 1.15^2 K_{IC}^2}{E'} = 2\gamma_{II} \quad (14)$$

となる. また, 任意の混合モード状態におけるエネルギー平衡は,

$$\frac{f(\theta_m) K_{\theta C}^2}{E'} = 2\gamma_\theta \quad (15)$$

となる. ここに,  $\gamma_\theta$  は混合モード亀裂進展時の単位面積あたりの破壊エネルギーである.

式(13)と(14)よりモード II 破壊靱性とモード I 破壊靱性の比  $K_{IIC}/K_{IC}$  は次のように求められる<sup>(16)</sup>.

$$\frac{K_{IIC}}{K_{IC}} = \sqrt{\frac{2}{3.042} \frac{\gamma_{II}}{\gamma_I}} \quad (16)$$

式(16)より, もしモード II とモード I の単位面積あたりの破壊エネルギーが等しいとするならば  $K_{IIC}/K_{IC} = 0.81$  となり, 従来の最大エネルギー解放率説より予測される値に帰する<sup>(18)</sup>. しかしここでは, 破壊エネルギーはモードにより異なるを考える.

エネルギー平衡論の優れている点は, 亀裂伝播開始の規準

が、亀裂先端の損傷に直接関係しないエネルギー解放率と、亀裂先端の損傷程度に密接に関係する破壊エネルギー率との平衡によって表されるということである。すなわち、亀裂先端近傍のエネルギー解放率は、亀裂先端の力学特性が  $J$  積分で表される場合を含めて、遠方応力と試験片形状のみにより決まるために、亀裂先端近傍の非線形性に依存しない。一方、亀裂先端の損傷の程度は材料物性と見なされる破壊エネルギー率により表される。この点、最大エネルギー解放率説は、亀裂先端まで線形弾性近似を仮定する最大円周応力説やひずみエネルギー密度説と本質的に異なるクライテリオンといえる。

### 3. 破壊エネルギー

一般にセラミックスはイオン結合・共有結合よりなる材料であり、亀裂先端に形成される損傷域はごく小さい場合が多い。また、この損傷域は微小割れ、相転移などにより形成されると考えられており、金属結合において支配的となる転位の作用は極めて限定される。一方、破壊エネルギーとは、亀裂が進展する直前までに亀裂先端に生成される損傷域を形成するために必要なエネルギーであるとすると、破壊エネルギーの大きさは亀裂が進展開始するときの臨界損傷域の大きさに比例するものと考えられる。

そこで、ここではセラミックスのような損傷域の十分小さい材料を対象として、損傷域は引張応力とせん断応力により形成されると考え、第1近似として、損傷域面積を亀裂先端近傍の弾性応力分布における最大主応力と最大せん断応力の等応力線によって囲まれる面積から求めることとする。また、最大主応力と最大せん断応力による損傷域形成は同等になされるとする。

亀裂先端近傍における最大主応力  $\sigma_1$  と、最大せん断応力  $\tau_{\max}$  は次のように表される。

モード I 負荷に対して、

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \left| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right| \right) \quad (17)$$

$$\tau_{\max} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right| \quad (18)$$

モード II 負荷に対して、

$$\sigma_1 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+3\cos^2\theta} \right) \quad (19)$$

$$\tau_{\max} = \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+3\cos^2\theta} \quad (20)$$

これらより、最大主応力と最大せん断応力の等応力線図の半径を求めると、次のようになる。

モード I 負荷に対して、

$$r_1 = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_1^2} \cos^2\theta \left( 1 + \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right)^2 \quad (21)$$

$$r_2 = \frac{K_I^2}{2\pi\tau_{\max}^2} \sin^2\frac{\theta}{2} \cos^2\frac{\theta}{2} \quad (22)$$

モード II 負荷に対して、

$$r_1 = \frac{K_{II}^2}{2\pi\sigma_1^2} \left( -\sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+3\cos^2\theta} \right)^2 \quad (23)$$

$$r_2 = \frac{K_{II}^2}{8\pi\tau_{\max}^2} (1+3\cos^2\theta) \quad (24)$$

ここに、 $r_1, r_2$  はそれぞれ最大主応力と最大せん断応力の等応力線の亀裂先端からの半径である。これらを図示すると Fig. 3 となる。Fig. 3(a) はモード I 負荷時の等応力線を、(b) はモード II 負荷時の等応力線を表しており、(b) には比較のためにモード I 負荷時の最大主応力の等応力線も実線で示した。これらの図から、最大主応力の等応力線により囲まれる面積は最大せん断応力により囲まれる面積よりかなり大きいこと、そのどちらもモード II 負荷の方が大きいことがわかる。したがって、モード II 亀裂進展に必要な破壊エネルギーの方がモード I 亀裂進展時よりも大きいであろうことが予想される。

ここで、線形弾性応力近似によると、亀裂進展時のモード I とモード II の臨界損傷域面積の比は、任意の応力下におけるモード I とモード II の損傷域面積の比に等しいと考えられる。よって、この損傷域面積の比から、モード I とモード II 破壊における破壊エネルギーの比を求めることが可能である。

上述の等応力線で囲まれた面積を数値計算すると Table 1 のようになる。表中の数値は、最大主応力の面積を基準に表したものである。そこで、最大主応力と最大せん断応力の等応力線により囲まれる面積の和をとり、モード II 負荷とモー

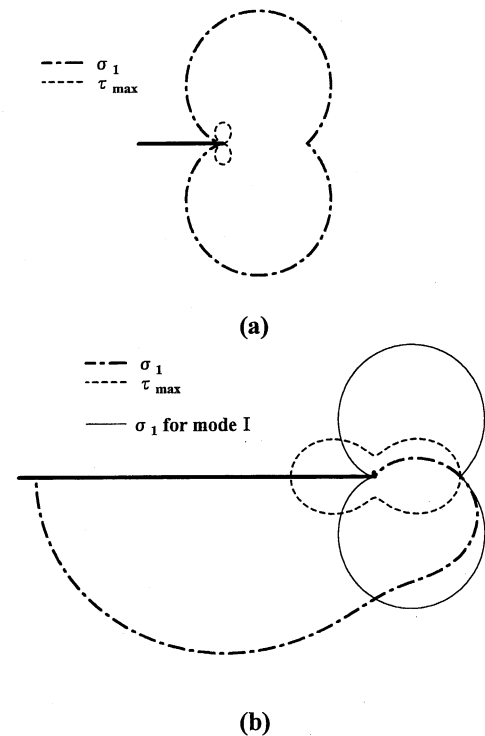


Fig. 3 Iso-stress contours of maximum principal stress,  $\sigma_1$ , and maximum shear stress,  $\tau_{\max}$ , under (a) mode I loading, and (b) mode II loading.

モード I 負荷における面積比を求めると 2.18 となる。その面積比がモード II とモード I の破壊エネルギーの比に等しいと考え、 $\gamma_{II}/\gamma_I = 2.18$  とすると、式(16)より、

$$\frac{K_{IIc}}{K_{Ic}} = 1.20 \quad (25)$$

が得られる。これが、グリフィスのエネルギー平衡の考えに基づいて予測される  $K_{IIc}/K_{Ic}$  値である。この値は、筆者らの以前に求めた実験値である 1.05~1.29<sup>(8)(9)</sup> に近い値である。

#### 4. 混合モード破壊クライテリオン

モード I-II 混合モード負荷をうける亀裂の進展に関するエネルギー平衡は、式(15)を無次元化することにより次のように表される。

$$f(\theta_m) (K_{\theta c}^*)^2 = 2\gamma_{\theta}^* \quad (26)$$

ここに、 $K_{\theta c}^*$  は無次元混合モード応力拡大係数の臨界値、 $\gamma_{\theta}^*$  : 無次元破壊エネルギーである。したがって、Table 1 の値より混合モード負荷のもとでの損傷域面積を計算し、それらの比から  $\gamma_{\theta}^*$  を求めて式(26)に代入すると  $K_{\theta c}^*$  が得られる。

式(13), (14)より、モード I, モード II 亀裂進展における無次元化された破壊エネルギー率は次のようになる。

$$2\gamma_I^* = \frac{K_{Ic}^2}{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (27)$$

$$2\gamma_{II}^* = \frac{2.18K_{Ic}^2}{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (28)$$

損傷域面積は式(21)等より  $K_I$  または  $K_{II}$  の 2 乗に比例することから、混合モード亀裂進展時の破壊エネルギー率は次のように表される。

$$2\gamma_{\theta}^* = \frac{K_I^2 + 2.18K_{II}^2}{K_I^2 + K_{II}^2} \frac{K_{Ic}^2}{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (29)$$

また、式(8)より無次元混合モード応力拡大係数は、

Table 1 Relative magnitude of the areas enclosed with iso-stress contours.

|         | Maximum principal stress | Maximum shear stress |
|---------|--------------------------|----------------------|
| Mode I  | 1                        | 1.63E-2              |
| Mode II | 1.90                     | 3.23E-1              |

Table 2 Mode I-II combined mode fracture criterion for various  $K_{II}$  and  $K_I$  ratio.

| $\beta = K_{II}/K_I$ | $\cot^{-1} \beta / \text{degree}$ | $\theta_m / \text{degree}$ | $f(\theta_m)$ | $2\gamma_{\theta}^*$ | $K_{\theta c}/K_{Ic}$ | $K_I^c/K_{Ic}$ | $K_{II}^c/K_{Ic}$ |
|----------------------|-----------------------------------|----------------------------|---------------|----------------------|-----------------------|----------------|-------------------|
| 0                    | 90                                | 0                          | 1.00          | 1.00                 | 1.00                  | 1.000          | 0                 |
| 0.176                | 80                                | -19.1                      | 1.00          | 1.04                 | 1.02                  | 0.974          | 0.172             |
| 0.364                | 70                                | -34.4                      | 1.01          | 1.14                 | 1.06                  | 0.912          | 0.332             |
| 0.577                | 60                                | -45.4                      | 1.02          | 1.30                 | 1.13                  | 0.833          | 0.481             |
| 0.839                | 50                                | -53.4                      | 1.04          | 1.49                 | 1.20                  | 1.741          | 0.622             |
| 1.19                 | 40                                | -59.6                      | 1.06          | 1.69                 | 1.27                  | 0.635          | 0.757             |
| 1.73                 | 30                                | -64.6                      | 1.08          | 1.89                 | 1.32                  | 0.511          | 0.885             |
| 2.75                 | 20                                | -68.9                      | 1.10          | 2.04                 | 1.36                  | 0.365          | 1.002             |
| 5.67                 | 10                                | -72.6                      | 1.13          | 2.14                 | 1.38                  | 0.195          | 1.107             |
| $\infty$             | 0                                 | -76.0                      | 1.15          | 2.18                 | 1.38                  | 0              | 1.202             |

$$K_{\theta c}^* = \frac{K_I}{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}} \cos \frac{\theta_m}{2} \left( \cos^2 \frac{\theta_m}{2} - \frac{3}{2} \beta \sin \theta_m \right) = \frac{K_I}{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}} g(\theta_m) \quad (30)$$

と表されるので、混合モード状態での混合モード応力拡大係数の臨界値  $K_{\theta c}$  に対応する  $K_I$ ,  $K_{II}$  の臨界値を  $K_I^c$ ,  $K_{II}^c$  と表すと、それらは次のように求められる。

$$K_I^c = \frac{K_{\theta c}^* \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}}{g(\theta_m)} \quad (31)$$

$$K_{II}^c = \beta K_I^c \quad (32)$$

上式に式(26), (29)を用いて整理すると次式が得られる。

$$\frac{K_I^c}{K_{Ic}} = \frac{1}{g(\theta_m)} \sqrt{\frac{1}{f(\theta_m)} \frac{K_I^2 + 2.18K_{II}^2}{K_I^2 + K_{II}^2}} \quad (33)$$

$$\frac{K_{II}^c}{K_{Ic}} = \beta \frac{K_I^c}{K_{Ic}} \quad (34)$$

各混合モード比について  $2\gamma_{\theta}^*$ ,  $K_{\theta c}/K_{Ic}$ ,  $K_I^c/K_{Ic}$ ,  $K_{II}^c/K_{Ic}$  を求めた結果を Table 2 に示す。また、 $K_I^c/K_{Ic}$ ,  $K_{II}^c/K_{Ic}$  を用いて描いた混合モード破壊クライテリオンを Fig. 4 に実線で示す。

ここで、混合モード破壊クライテリオンとして、

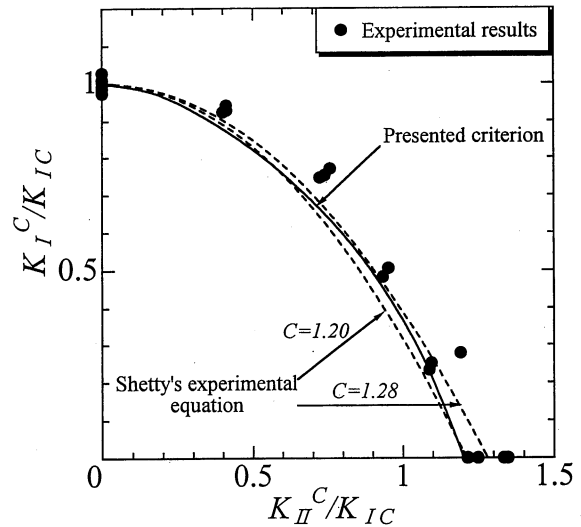


Fig. 4 Mode I-II combined mode fracture criterion and experimental results of soda-lime float glass.

Palaniswamy と Knauss<sup>(18)</sup>は最大エネルギー解放率説として次式を導いている。

$$2(1-K_I)=3K_{II}^2 \quad (35)$$

これを变形すると次のようなクライテリオンとなる。

$$\frac{K_I}{K_{IC}} + \frac{3}{2} \left( \frac{K_{II}}{K_{IC}} \right)^2 = 1 \quad (36)$$

また, Singh と Shetty<sup>(11)</sup>は実験式として

$$\frac{K_I}{K_{IC}} + \left( \frac{K_{II}}{CK_{IC}} \right)^2 = 1, \quad C = \frac{K_{IIC}}{K_{IC}} \quad (37)$$

を提案しており, これらは本質的に同一のクライテリオンであることがわかる。

式(37)において  $C=1.20$  としたときのクライテリオンを Fig. 4 に破線で示した。図より, ここで求めたクライテリオンと,  $C=1.20$  としたときの Singh と Shetty の実験式とはよく一致することがわかる。

### III. ガラスの円板試験

#### 1. 円板試験

モード I-II 混合モード破壊靱性試験を行うために, Fig. 5 に示すような, 中央に傾いた亀裂のある円板を材料試験機により圧縮する円板試験法<sup>(7)-(9)</sup>を用いた。この方法は, Fig. 5 において, 亀裂の傾き角  $\theta=0$  のときは亀裂面に垂直な引張応力が作用し, 純モード I 破壊靱性試験となり,  $\theta$  をある特定の角 ( $c/R=0.4$  のときは  $\theta=25.2$ 度) とすると純モード II 試験となる。また, その間の任意の角度にすると, モード I, モード II の混合モード試験が行えるというものである。この方法には次のようないくつかの利点がある。1つには, 亀裂方向を傾けるだけでモード I, モード II およびこれらの混合モード破壊靱性試験が行えること, すなわち, 同じ力学的試験環境下でこれらの試験が可能であること, 2つには, 帯板試験におけるソーダ石灰ガラスの混合モード破壊靱性試験において顕著に観察されるような安定亀裂成長が観察されないこと<sup>(19)</sup>, 3つには Singh と Shetty の指摘のように<sup>(11)</sup>, 実験者や材質の差異によらずに極めて類似の結果が得られるということである。欠点としては, セラミックスのような硬い材質に対しては予亀裂の加工が容易でないことが

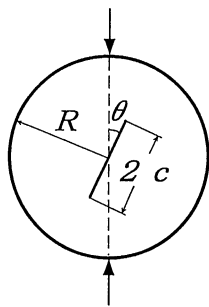


Fig. 5 A disk specimen for the combined mode fracture toughness test.

あげられる。

この試験片の応力拡大係数は筆者らにより次のように解析されている<sup>(8)(9)</sup>。

$$K_{I,II} = F_{I,II} \frac{P}{RB} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \quad (38)$$

ここに,  $P$ : 荷重,  $F_I, F_{II}$ : モード I, モード II 無次元応力拡大係数であり, その無次元応力拡大係数は文献(8), (9)に示されている。

#### 2. 試験片

ここでは, 極めて脆性的かつ等方均質的であり, 破面に凹凸の少ない材料として, 市販の窓ガラス用ソーダ石灰ガラスを用いた。破面に凹凸があると, 天然亀裂の場合, 亀裂進展時に破面のかみ合いを生じやすく, モード I とモード II とで摩擦抵抗が異なるからである<sup>(14)</sup>。試験片形状は, 直径  $2R=40$  mm, 厚さ 2 mm とした。ノッチの加工は, 歯科用スリットカッタ(直径 22 mm, 厚さ 0.23 mm)で円板の表面に両面から切り込みを入れ, ノッチ先端のシェブロンノッチ状の部分をはんだごて加熱による熱応力により進展させて予亀裂とした。予亀裂長さ  $2c$  は円板半径との比  $c/R$  がほぼ 0.4 となるようにした。加工による残留応力の影響については, 亀裂を加工したガラスを焼鈍すると亀裂先端が鈍化することが知られていることから<sup>(20)</sup>, ここでは試験片を焼鈍せずにそのまま実験に供した。

#### 3. 試験結果

負荷速度は材料試験機のクロスヘッド速度を 0.1 mm/min とし, 大気中で実験した。試験片予亀裂の傾き角  $\theta$  (Fig. 5 参照) は 5 度おきとし, 純モード II については  $c/R$  により決まる傾き角<sup>(8)(9)</sup>とした。

得られたモード I, モード II 破壊靱性は次のようである。モード I 破壊靱性値とその標準偏差は,  $K_{IC}=0.692 \pm 0.018$  MPa $\cdot$ m<sup>1/2</sup>, モード II 破壊靱性値については,  $K_{IIC}=0.886 \pm 0.042$  MPa $\cdot$ m<sup>1/2</sup>, モード II とモード I 破壊靱性の比は,  $C=K_{IIC}/K_{IC}=1.28$  となった。この破壊靱性の比は, 筆者らの以前に報告した黒鉛や岩石等の値 1.05~1.29 と極めて近い値であり<sup>(8)(9)</sup>, また, Singh と Shetty のソーダ石灰ガラスについての円板試験法の結果である 1.25<sup>(11)</sup> や, Yarema らのサーメットについての結果<sup>(21)</sup> とほぼ一致するものである。

混合モード破壊靱性試験結果を, 上述の予測値とともに Fig. 4 に示した。図には Singh と Shetty の実験式において  $C=1.28$  としたときの式も示してあるが, これらは実験結果とほぼ一致しているといえる。

ここでは, 損傷域の大きさを線形弾性応力分布から求めていることから, 極めて脆性なソーダ石灰ガラスを試験片として採用したが, 損傷域の大きさは一般には材質に依存すると思われるので, 有限要素法などの非線形解析によってより厳密な解析が必要である。

## IV. 結 論

## 文 献

脆性材料のモード I-II 混合モード破壊のクライテリオンを構築することを目的として、亀裂が亀裂面外に伝播するときの最大エネルギー解放率と、亀裂先端損傷域から予測される破壊エネルギー率のエネルギー平衡を考えた。モード I とモード II の破壊エネルギーの比は、亀裂先端近傍の最大主応力と最大せん断応力との等応力線により囲まれる面積の比から求めた。その結果、次のような結論を得た。

(1) 従来の最大エネルギー解放率説は、破壊エネルギーは負荷モードによらないという前提に基づいて導かれているのに対し、ここでは、破壊エネルギーは亀裂伝播時の臨界損傷域の大きさに比例すると考えて、混合モード破壊クライテリオンを導いた。

(2) 予測されたモード II 破壊靱性とモード I 破壊靱性の比  $K_{IIC}/K_{IC}$  は 1.20 となった。また、混合モード破壊のクライテリオンは Shetty らの実験式とよく一致した。

(3) ソーダ石灰ガラスについて円板試験を行い、モード I、モード II 破壊靱性を求めた。その結果、 $K_{IIC}/K_{IC}=1.28$  となり、予測値に近い値となった。また、モード I-II 混合モード破壊靱性試験を行い、混合モード破壊クライテリオンを実験的に求めた。その結果は予測されたクライテリオンとほぼ一致した。

- (1) F. Erodogan and G. C. Sih: *J. Basic Engng.*, **85**(1963), 519.
- (2) G. C. Sih: *Int. J. Fracture*, **10**(1974), 305.
- (3) M. A. Hussain, S. L. Pu and J. Underwood: *ASTM STP 560*, ASTM (1974), 2.
- (4) J. J. Petrovic, J.: *Am. Ceram. Soc.*, **68**(1985), 348.
- (5) 市川昌弘: *材料*, **40**(1991), 224.
- (6) 影山和郎, 岡村弘之: *機論*, **A-48**(1982), 783.
- (7) 淡路英夫, 亀井浅道: *材料強度誌*, **6**(1971), 100.
- (8) H. Awaji and S. Sato: *J. Engng. Mater. & Tech.*, **100**(1978), 175.
- (9) 淡路英夫, 佐藤千之助: *材料*, **28**(1979), 244.
- (10) D. K. Shetty, A. R. Rosenfield and W. H. Duckworth: *J. Am. Ceram. Soc.*, **68**(1985), C325.
- (11) D. Singh and D. K. Shetty: *J. Am. Ceram. Soc.*, **72**(1989), 78.
- (12) D. K. Shetty, A. R. Rosenfield and W. H. Duckworth: *J. Am. Ceram. Soc.*, **69**(1986), 437.
- (13) D. K. Shetty, A. R. Rosenfield and W. H. Duckworth: *Engng. Fract. Mech.*, **26**(1987), 825.
- (14) M. Li and M. Sakai: *J. Am. Ceram. Soc.*, **79**(1996), 2718.
- (15) S. Suresh, C. F. Shih, A. Morrone and N. P. O'Dowd: *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**(1990), 1257.
- (16) H. Awaji: *Int. J. Fracture*, (in press).
- (17) D. Broek: *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Third revised edition, Martinus Nijhoff Publishers, (1982), 115.
- (18) K. Palaniswamy and W. G. Knauss: *Mechanics Today Vol. 4*, Ed. by S. Nemat-Nasser, Pergamon Press, (1978), 87.
- (19) 加藤稔也, 本多沢雄, 西川直宏, 淡路英夫: *セラミックス協会1998年会講演予稿集*, (1998), 17.
- (20) 池田清彦, 井垣久: *機論*, **A-54**(1988), 2056.
- (21) S. Ya. Yarema, G. S. Ivanitskaya, A. L. Maistrenko and A. I. Zbromirskii: *Probl. Prochn.*, **16**(1984), 1121.